UNTERSUCHUNG DER SCHALLAUSBREITUNG IM INHOMOGENEN STRÖMUNGSFELD MIT ASYMPTOTISCHEN MATHEMATISCHEN METHODEN

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines
Doktor-Ingenieurs
der Abteilung für Elektrotechnik
an der Ruhr-Universität Bochum

von

ULRICH VOGELSANG
gen. BUSCHMANN

Hagen

Bochum 1982

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547222_0037

UNTERSUCHUNG DER SCHALLAUSBREITUNG IM INHOMOGENEN STRÖMUNGSFELD MIT ASYMPTOTISCHEN MATHEMATISCHEN METHODEN

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines
Doktor-Ingenieurs
der Abteilung für Elektrotechnik
an der Ruhr-Universität Bochum

von

ULRICH VOGELSANG
gen. BUSCHMANN

Hagen

Bochum 1982

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Dissertation eingereicht am: 26. 3. 1982

Tag der mündlichen Prüfung: 26. 5. 1982

Referent: Prof. Dr.-Ing. J. Blauert

Korreferent: Dr.-Ing. habil. V. Vasanta Ram

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand am Lehrstuhl für Allgemeine Elektrotechnik und Akustik.

Ich danke allen, die mir im Verlaufe dieser Arbeit geholfen haben. Mein besonderer Dank gilt Herrn Dr.-Ing. habil. V. Vasanta Ram, dessen Mut zu interdisziplinärer Zusammenarbeit, dessen großes Interesse und intensive Förderung diese Arbeit ermöglicht haben.

Inhaltsverzeichnis

		Seite
0	Einleitung und Aufgabenstellung	1
1	Die strömungsmechanisch-akustischen Gleichungen	4
2	Einige Eigenschaften des Strömungsgeschwindigkeitsfeldes der Atmosphäre in der Nähe des Erdbodens	6
3	Zur Schallausbreitung im Strömungsgeschwindigkeitsfeld der Atmosphäre	20
3.1	Voraussetzungen der Brechungsmodelle	24
3.2	Bisherige Untersuchungen zu Brechungsmodellen	26
3.3	Die Gleichungen für Brechungsmodelle	28
4	Asymptotische Gleichungen für die Schallausbreitung im inhomogenen zeitinvarianten Strömungsgeschwindigkeitsfeld	34
4.1	Die Strömungsfeldgleichungen	34
4.1.1	Skalierung der Strömungsfeldgleichungen	34
4.1.2	Asymptotische Strömungsfeldgleichungen	40
4.1.3	Die Eigenschaften der asymptotischen Strömungsfeldgleichungen	44
4.1.4	Vergleich der asymptotischen Gleichungen mit den ursprünglichen Gleichungen	47
4.2	Die akustischen Gleichungen im inhomogenen Strömungsgeschwindigkeitsfeld	49
4.2.1	Zur Trennung von Akustik und Strömungsmechanik	49
4.2.2	Asymptotische akustische und strömungsmechanische Gleichungen	52
4.2.3	Energiebeziehungen	66
4.2.4	Vergleich mit den Ergebnissen anderer Autoren	72

4.3 Lösung der Gleichungen nach der Methode der geometrischen Akustik 74

4.3.1 Die geometrisch-akustischen Gleichungen 74

4.3.2 Die Eikonalgleichung 78

4.3.3 Die Transportgleichung 84

4.3.4 Zusammenfassung 92

5 Die numerische Lösung der asymptotischen Gleichungen am Beispiel der Schallausbreitung im Strömungsfeld um einen Lärmschutzwall 94

5.1 Bisherige Untersuchungen zum Windeinfluß auf Schallschirme 95

5.2 Berechnung des Strömungsgeschwindigkeitsfeldes um einen Lärmschutzwall 105

5.2.1 Integralgleichungsmethode zur Lösung des Randwertproblems 106

5.2.2 Berechnung der Koeffizienten des Gleichungssystems und der Strömungsgeschwindigkeit 110

5.2.3 Numerische Ergebnisse der Strömungsfeldberechnung 114

5.3 Numerische Lösung von charakteristischen Gleichungssystemen am Beispiel der Eikonalgleichung und Ergebnisse 125

6 Zusammenfassung 143

Anhang 1: Prädiktor-Korrektor-Verfahren 146

Anhang 2: Größen und Zahlenwerte 148

Literaturverzeichnis 152

Lebenslauf 160

0. Einleitung und Aufgabenstellung

Die Schallausbreitung in der Atmosphäre unterliegt Wind- und Temperatureinflüssen. Durch beide Effekte ändern sich die Eigenschaften des akustischen Mediums; sie bewirken eine Brechung der Schallwellen /BLAUERT (1978)/.

Ist keine Strömung vorhanden, so werden durch ein nicht-konstantes Temperaturfeld lediglich lokale Änderungen der Schallgeschwindigkeit hervorgerufen: Das Medium wird inhomogen. Die Berechnung der Temperatureinflüsse ist seit langem gelöst. SECKLER & KELLER (1959) konnten zeigen, daß sich im Rahmen der GTD (geometrical theory of diffraction) außer Brechungs- auch Beugungsphänomene im inhomogenen Medium behandeln lassen. Die mathematische Behandlung von Strömungsfeldeinflüssen hat sich demgegenüber als erheblich schwieriger erwiesen. Ein nichtkonstantes Strömungsgeschwindigkeitsfeld (auch kurz als Strömungsfeld bezeichnet) bewirkt außer der Inhomogenität auch eine Anisotropie des akustischen Mediums. Zwar konnte schon BLOKHINTZEV (1946 a) allgemeine akustische Gleichungen für die Schallausbreitung im inhomogenen Strömungsfeld herleiten. Einerseits sind, wie im Verlauf der Arbeit gezeigt wird, diese Gleichungen nicht in der Lage, die wesentlichen Eigenschaften des Strömungsfeldes der Atmosphäre in Erdbodennähe und der akustischen Welle in diesem Feld zu beschreiben. Andererseits sind sie so kompliziert, daß bisher nur ein Sonderfall ausführlicher behandelt wurde, der die Gleichungen von BLOKHINTZEV wesentlich vereinfacht. Dieser Sonderfall ist die akustische Wellenausbreitung im "geschichteten" (stratified, layered) Strömungsfeld. Die Annahme des geschichteten Mediums bedeutet, daß Temperatur und Strömungsgeschwindigkeit nur von einer Koordinate abhängen und der Strömungsgeschwindigkeitsvektor überall senkrecht zu dieser Koordinate verläuft. Geschichtete Strömungsfelder, auch Scherströmungen genannt, werden für aeroakustische Anwendungen häufig zugrunde gelegt /siehe z. B. GOLDSTEIN (1976)/. In THOMPSON's (1972), (1974a), (1974b) Modell der akustischen Wellenausbreitung wurde das Strömungsfeld als geschichtet angenommen. CASANOVA-MARTINEZ (1975), (1976) benutzte THOMPSON's Modell für die Schallausbreitung im Freien und verglich die Ergebnisse mit Freifeldmessungen.

Im Zusammenhang mit der Lärmausbreitung in der Atmosphäre hat sich in den letzten Jahren ein Bedarf an theoretischen Modellen entwikkelt, die die Schallausbreitung auch in nicht-geschichteten Strömungsfeldern beschreiben. Ein Beispiel dafür ist das Strömungsfeld in der Umgebung von Schallschirmen. Gerade diese Anwendung ist interessant geworden, weil mehrere Autoren /SCHOLES & SARGENT (1971); REINHOLD (1971), (1974); DE JONG (1974); DE JONG & STUSNICK (1976); NIJS (1980) eine starke Abhängigkeit der Schalldämmung von Schallschirmen von Windstärke und -richtung gemessen haben.

Ein theoretisches Modell für den Windeinfluß auf Schallschirme ist bisher nicht entwickelt worden. DE JONG hat in Anknüpfung an geometrisch-akustische Methoden im ruhenden Medium eine plausible Hypothese vorgeschlagen, die den Windeinfluß aus einem Zusammenwirken von Brechung der akustischen Welle im inhomogenen Strömungsfeld und Beugung am Schallschirm erklären soll. Eine Überprüfung von DE JONGs Hypothese war bisher nicht möglich, da weder für die Beeinflussung der akustischen Welle noch für die Beugung an einem Hindernis im Strömungsfeld der Atmosphäre ein geeignetes Modell zur Verfügung steht. Die oben genannten Messungen und DE JONG's Hypothese waren der Anlaß die folgenden Fragestellungen genauer zu untersuchen:

Erlauben es Methoden der Störungsrechnung, strömungsmechanische und akustische Gleichungen für die akustische Wellenausbreitung im Strömungsfeld der Atmosphäre zu erhalten, so daß die geometrische Akustik auch auf diesen Fall angewandt werden kann ?

Welche numerischen Methoden stehen zur Verfügung, um die Gleichungen zu lösen ?

Geometrisch-akustische Gleichungen wären der erste Schritt, um auch die GTD auf die Schallausbreitung im atmosphärischen Strömungsgeschwindigkeitsfeld zu erweitern und auf diese Weise ein Modell zu entwickeln, das sich auch zur Beschreibung des Wind- und Temperatureinflusses auf Schallschirme eignet.

Störungsrechnungsmethoden haben sich in vielen Fällen bei der Entwicklung von Näherungslösungen komplizierter technischer und physikalischer Probleme bewährt /siehe NAYFEH (1973); NAYFEH & MOOK

(1975); WHITHAM (1974); BABIČ & KIRPIČNIKOVA (1979)/, bei denen anderenfalls nur rein numerische Lösungen /z. B. MARSAL (1976)/ gefunden werden können. Die ersteren weisen gegenüber den letzteren eine Reihe von Vorteilen auf:

- Sie erlauben es, den Rechenaufwand der gewünschten Genauigkeit anzupassen.
- Sie sind weniger anfällig gegen Instabilitäten und Parametervariationen.
- Sie gestatten es, im voraus die Größenordnung des Restfehlers abzuschätzen.

Im 4. Kapitel werden allgemeine asymptotische strömungsmechanische und akustische Gleichungen für die Schallausbreitung in nichtgeschichteten Strömungsfeldern hergeleitet und diskutiert.

Zuvor wird auf Eigenschaften des Strömungsfeldes der Atmosphäre in der Nähe des Erdbodens eingegangen. Daran schließt sich eine Darstellung der Voraussetzungen und Annahmen der Brechungsmodelle und eine Übersicht über bisherige Arbeiten an.

Im zweiten Teil der Arbeit wird am Beispiel der Umströmung eines Lärmschutzwalles gezeigt, wie die im 4. Kapitel entwickelten Gleichungen mit Hilfe eines Minicomputers gelöst werden können. Ferner werden die numerischen Ergebnisse vorgestellt.

1. Die strömungsmechanisch-akustischen Gleichungen

Akustik und Strömungsmechanik werden durch die folgenden Erhaltungssätze beschrieben /MORSE & INGARD (1968) ; LANDAU & LIFSCHITZ (1978)/ :

Erhaltung der Masse (Kontinuitätsgleichung)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v}\ \mathrm{grad}\ \rho + \rho\ \mathrm{div}\ \vec{v} = Q\ (\vec{r},\ t) \qquad (1/1)$$

Erhaltung des Impulses (Navier-Stokes Gleichung)

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\mathrm{grad}\right)\vec{v}\right) + \mathrm{grad}\ p - \mu\ \Delta\ \vec{v} - \left(\xi + \frac{\mu}{3}\right)\cdot \mathrm{grad}\ \mathrm{div}\ \vec{v} = \vec{J}\ (\vec{r},\ t) \qquad (1/2)$$

Erhaltung der Energie

$$\frac{D\ E}{D\ t} = T\ \frac{D\ S}{D\ t} + \frac{p}{\rho^2}\ \frac{D\ \rho}{D\ t} = K\ (\vec{r},\ t) \qquad (1/3)$$

Hinzu kommt eine Gleichung für den Zustands des Mediums. Die Luft kann unter den hier interessierenden Bedingungen als ideales Gas aufgefaßt werden:

Zustandsgleichung

$$p = c_p\ \frac{\gamma - 1}{\gamma}\ \rho \cdot T \qquad (1/4)$$

Die Bedeutung der hier auftretenden Größen ist im Anhang 2 angegeben. $Q\ (\vec{r},\ t)$, $\vec{J}\ (\vec{r},\ t)$, $K\ (\vec{r},\ t)$ stellen Masse-, Impuls- und Wärmequellen dar, die außerhalb des Quellgebietes verschwinden. Weiterhin gilt der folgende Zusammenhang zwischen Euler- und Lagrange-Beschreibung:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\mathrm{grad}\right) \qquad (1/5)$$

Eine allgemeine Lösung dieses nichtlinearen partiellen Differentialgleichungssystems ist nicht möglich, so daß geeignete Vereinfachungen vorgenommen werden müssen. Zunächst wird gezeigt, von welchen Vereinfachungen für das Strömungsfeld der Atmosphäre in Erdbodennähe ausgegangen werden kann und welche Eigenschaften es in diesem Bereich aufweist.

2. Einige Eigenschaften des Strömungsgeschwindigkeitsfeldes der Atmosphäre in der Nähe des Erdbodens

Um die Eigenschaften der Atmosphäre in einem Modell richtig zu erfassen, ist es erforderlich, eine charakteristische Höhe und Länge anzugeben, über die hinweg die Atmosphäre beobachtet werden soll. Für diese Untersuchung liegt die charakteristische Länge bei etwa 1oo m und die charakteristische Höhe bei etwa 3o m über dem als relativ eben angenommenen Erdboden. Relativ eben heißt in diesem Zusammenhang, daß Bodenunebenheiten klein sind gegenüber der charakteristischen Höhe. Auf Seite 14 wird diese Bedingung genauer spezifiert. Verglichen mit der Höhe der atmosphärischen Grenzschicht von etwa 1ooo m und der Länge von mehreren Kilometern, über die eine wesentliche Beeinflussung der meteorologischen Bedingungen erfolgt, sind die hier interessierenden Skalen so klein, daß sich die Eigenschaften der Atmosphäre in diesem Bereich nicht ändern. Hier werden also Vorgänge untersucht, die im Bereich der Oberflächenschicht (boundary surface layer) stattfinden. Diese Schicht reicht je nach metereologischen Bedingungen bis in 3o - 6o m Höhe über dem Erdboden. /TEUNISSEN (197o), LUMLEY & PANOFSKI (1964)/. Die Eigenschaften der Atmosphäre in der Oberflächenschicht hängen stark von Abweichungen der meteorologischen Bedingungen vom stabilen Gleichgewichtszustand der adiabatisch geschichteten Atmosphäre ab /PRANDTL (1969)/. Bei diesem Zustand der Atmosphäre ruft die Gravitation lediglich einen Druck-, Dichte- und Temperaturabfall in Abhängigkeit von der Höhe über dem Erdboden hervor. Im folgenden soll das Koordinatensystem nach Bild 2/1 verwendet werden, bei dem die Höhe über dem Erdboden durch die z-Koordinate gekennzeichnet ist.

Die Verläufe von Druck-, Temperatur und Dichte betragen /PRANDTL (1969)/ :

$$p(z) = p_e \left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\rho_e g_e}{p_e} z \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

$$T(z) = \frac{g_e}{c_p} \left(\frac{p_e \gamma}{\rho_e g_e (\gamma - 1)} - z \right)$$

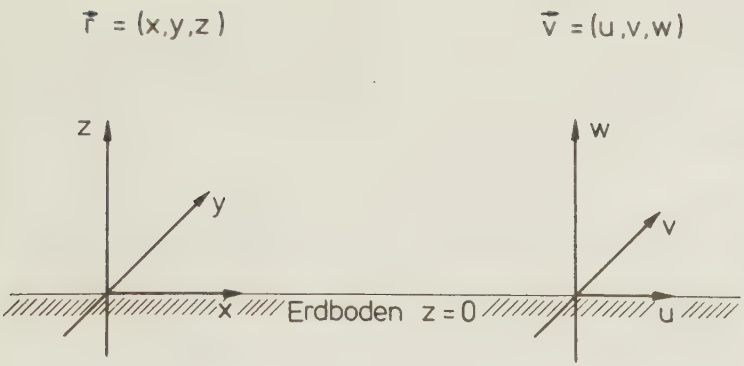

Bild 2/1

Koordinatensystem

$$\rho(z) = \rho_e \left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\rho_e g_e}{p_e} z\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}$$

Der Index e bedeutet, daß es sich um Größen am Erdboden handelt. Mit den im Anhang 2 angegebenen Zahlenwerten ergeben sich in 3o m Höhe die folgenden Abweichungen von den entsprechenden Werten am Erdboden:

$$\frac{p\ (\ 3o\ m\ ) - p_e}{p_e} = -\ 3.75\ {}^0/_{00}$$

$$\frac{\rho\ (\ 3o\ m\ ) - \rho_e}{\rho_e} = -\ 2.67\ {}^0/_{00}$$

Der Temperaturanstieg beträgt 0.098^0/m. Unter diesen Bedingungen hat das Strömungsfeld eine besonders einfache Struktur. Da keine Auftriebskräfte in der Atmosphäre vorhanden sind, kann im Mittel auch keine z-Komponente der Strömungsgeschwindigkeit auftreten. Der Strömungsgeschwindigkeitsvektor verläuft parallel zum Erdboden. Man spricht dann vom Strömungsfeld unter neutralen Bedingungen. Das Strömungsfeld der neutralen Atmosphäre nahe dem Erdboden

ist gut bekannt. Die Gründe hierfür sind, daß einerseits die Strömungsfeldgleichungen eine relativ einfache Form aufweisen. Andererseits erlaubt die Abwesenheit von Auftriebskräften eine Modelluntersuchung im Windkanal. LUMLEY & PANOFSKI konnten zeigen, daß wesentliche Eigenschaften des Strömungsfeldes auch dann erhalten bleiben, wenn die Atmosphäre nicht neutral ist. Hierauf wird später eingegangen.

Zunächst sollen jedoch für neutrale Bedingungen die grundsätzlichen Eigenschaften des Strömungsfeldes erläutert werden. Die geringen Abweichungen von Druck-, Dichte- und Temperaturverlauf bis in 3o m Höhe über relativ ebenem Erdboden erlauben es, diese Größen als konstant anzunehmen. Daraus ergeben sich eine ganze Reihe von Vereinfachungen für die Gleichungen (1/1) bis (1/4) :

Da die Änderung von ρ sehr gering ist, folgt aus (1/1) mit

$\rho = \rho_0 = \text{konstant}$

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \qquad (2/1)$$

Die Navier-Stokes Gleichung (1/2) nimmt dann die einfachere Form

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \operatorname{grad} \right) \vec{v} \right) + \operatorname{grad} p - \mu \Delta \vec{v} = \vec{J} \ (\vec{r}, t)$$

an.

Weiterhin treten unter neutralen atmosphärischen Bedingungen keine Auftriebskräfte oder anderen äußeren Kräfte auf, so daß

$\vec{J} (\vec{r}, t) = 0$ ist.

Wird, wie oben gezeigt, p = konstant angenommen, so erhält man

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \operatorname{grad} \right) \vec{v} - \frac{\mu}{\rho_0} \Delta \vec{v} = 0 \qquad (2/2)$$

Bei weiteren Vereinfachungen ist Vorsicht geboten. Die Zähigkeit der Luft beträgt $\mu = 1.71 \cdot 10^{-5}$ kg/m/s und $\rho_0 = 1.29$ kg/m³, so daß die kinematische Zähigkeit $\nu = \frac{\mu}{\rho_0} = 1.33 \cdot 10^{-5} m^2/s$ ergibt.

Dieser sehr kleine Faktor kann aber in (2/2) nicht einfach vernachlässigt werden, da er mit der höchsten Ableitung von $\vec{v}$ multipliziert wird und der Charakter der Differentialgleichung - und damit auch die Eigenschaften der Strömung - gerade von der höchsten Ableitung entscheidend beeinflußt werden. Ferner ist zu beachten,

daß der Charakter der Strömung durch die Reibung am Erdboden über mehrere hundert Kilometer hinweg bestimmt wird. Über die sehr kurze charakteristische Länge von 500 m hinweg werden sich deshalb bei gleicher Erdbodenbeschaffenheit die Eigenschaften der Strömung nicht verändern. Es wird daher davon ausgegangen, daß der Erdboden unendlich ausgedehnt ist und die Strömung im betrachteten Raumgebiet einen stationären Endzustand erreicht hat. Dieser Endzustand wird entscheidend von der Reynolds-Zahl der Strömung $Re = \frac{v \cdot l}{\nu}$ bestimmt. v und l sind eine für das Problem wesentliche Strömungsgeschwindigkeit bzw. Länge. Die einzige sinnvolle Länge für unendlich ausgedehnten Erdboden ist die Höhe über dem Erdboden. Für eine Strömungsgeschwindigkeit von z. B. $v = 5 m/s$ und $l = 0.1$ m Höhe liegt die Reynoldszahl mit $Re = 3.77 \cdot 10^4$ sehr hoch. Die Reynoldszahl gibt das Verhältnis zwischen Trägheits- und Reibungskräften an, so daß bereits in sehr geringer Höhe über dem Erdboden die Trägheitskräfte die Reibungskräfte bei weitem überwiegen. Wegen der sehr geringen Reibungskräfte können kleine Störungen in der Strömung nicht schnell genug abklingen. Dadurch wird die Strömung instabil. Es bilden sich Wirbel,die infolge weiterer Instabilitäten in immer kleinere Wirbel zerlegt werden. Über große Entfernung wird schließlich der Endwert der ausgebildeten turbulenten Strömung erreicht. Er ist durch eine stochastische Verteilung von Wirbeln unterschiedlicher Größenordnung gekennzeichnet. Wegen des stochastischen Charakters der Strömung ist eine statistische Beschreibung notwendig. Die Größen der Gleichungen (2/1) und (2/2) werden getrennt nach gemittelter Bewegung (gekennzeichnet durch $\bar{}$) und überlagerter Schwankungsbewegung (gekennzeichnet durch $'$). Die hier angewandte Mittelung ist die Scharmittelung. Sie setzt voraus, daß wenigstens im Prinzip, ein bestimmter Satz mittlerer Strömungsbedingungen unendlich oft wiederholt werden kann und daß im Verlauf der Mittelung alle möglichen geringen Variationen verschwinden. Für die zeitlich und örtlich veränderliche Strömungsgeschwindigkeitskomponente $v_i(\vec{r}, t, \beta)$ ist β der Scharparameter. Die obige Bedingung kann dann als:

$$\overline{v_i(\vec{r}, t, \beta)} = \lim_{N \to \infty} \frac{v_i(\vec{r}, t, 1) + \ldots + v_i(\vec{r}, t, N)}{N}$$

geschrieben werden.

Für Scharmittelung wird angenommen, daß die Mittelwertbildung mit

anderen linearen Operationen vertauschbar ist, so daß auch :

$$\overline{\frac{\partial v_i (\vec{r}, t, \beta)}{\partial t}} = \frac{\partial}{\partial t} \bar{v}_i (\vec{r}, t, \beta) \quad \text{für die zeitliche Differentiation}$$

$$\overline{\frac{\partial v_i (\vec{r}, t, \beta)}{\partial r_j}} = \frac{\partial}{\partial r_j} \bar{v}_i (\vec{r}, t, \beta) \quad \text{für die örtliche Differentiation}$$

Der Scharparameter β soll im weiteren nicht mehr geschrieben werden.

$$\overline{v_i (\vec{r}, t, \beta)} = \bar{v}_i (\vec{r}, t)$$

Per Definition gilt nun für die Mittelwerte der Schwankungsbewegung

$$\overline{v'_i (\vec{r}, t)} = 0$$

ferner :

$$\overline{\bar{v}_i (\vec{r}, t)} = \bar{v}_i (\vec{r}, t)$$

und:

$$\vec{\bar{v}} (\vec{r}, t) = \left(\bar{u} (\vec{r}, t), \bar{v} (\vec{r}, t), \bar{w} (\vec{r}, t) \right)$$

Es werden nun die in den Gleichungen (2/1) und (2/2) auftretenden Größen nach gemittelten Größen und Schwankungsgrößen getrennt:

$$p = \bar{p} + p' \qquad \overline{p'} = 0$$

$$\vec{v} = \vec{\bar{v}} + \vec{v}' \qquad \overline{\vec{v}'} = 0$$

und in die Gleichungen (2/1) und (2/2) eingesetzt:

$$\operatorname{div} (\vec{\bar{v}} + \vec{v}') = 0$$

$$\frac{\partial \vec{\bar{v}}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + \left((\vec{\bar{v}} + \vec{v}') \cdot \operatorname{grad} \right) (\vec{\bar{v}} + \vec{v}') - \nu \Delta (\vec{\bar{v}} + \vec{v}') = 0$$

oder:

$$\operatorname{div} \vec{\bar{v}} + \operatorname{div} \vec{v}' = 0 \qquad (2/3)$$

$$\frac{\partial \bar{\vec{v}}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + \left(\bar{\vec{v}} \cdot \mathrm{grad}\right)\bar{\vec{v}} + \left(\vec{v}' \cdot \mathrm{grad}\right)\bar{\vec{v}} + \left(\bar{\vec{v}} \cdot \mathrm{grad}\right)\vec{v}' + \left(\vec{v}' \mathrm{grad}\right)\vec{v}'$$

$$- \nu \Delta \bar{\vec{v}} - \nu \Delta \vec{v}' = 0 \qquad (2/4)$$

Nun wird gemittelt und man erhält

mit $$\mathrm{div}\ \bar{\vec{v}} = 0 \qquad (2/5)$$

$$\frac{\partial \bar{\vec{v}}}{\partial t} + \left(\bar{\vec{v}} \cdot \mathrm{grad}\right)\bar{\vec{v}} + \overline{\left(\vec{v}' \cdot \mathrm{grad}\right)\vec{v}'} - \nu \Delta \bar{\vec{v}} = 0 \qquad (2/6)$$

Differentialgleichungen für die gemittelten Größen.
Aus Gleichung (2/3) und (2/5) folgt:

$$\mathrm{div}\ \vec{v}' = 0 \qquad (2/7)$$

so daß Gleichung (2/6) in der Form:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \left(\bar{u} \cdot \mathrm{grad}\right)\bar{\vec{v}} + \mathrm{div}\ \overline{u'\,\vec{v}'} - \nu \Delta \bar{u} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \left(\bar{v} \cdot \mathrm{grad}\right)\bar{\vec{v}} + \mathrm{div}\ \overline{v'\,\vec{v}'} - \nu \Delta \bar{v} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \left(\bar{w} \cdot \mathrm{grad}\right)\bar{\vec{v}} + \mathrm{div}\ \overline{w'\,\vec{v}'} - \nu \Delta \bar{w} = 0$$

geschrieben werden kann.
Es wird nun Ergodizität unterstellt, so daß statt Scharmittelung zeitliche Mittelung vorgenommen werden kann. Dann ist

$$\frac{\partial \bar{\vec{v}}}{\partial t} = 0 \quad \text{und man erhält:}$$

$$\mathrm{div}\ \bar{\vec{v}} = 0 \qquad (2/8)$$

$$\left(\bar{u} \cdot \mathrm{grad}\right)\bar{\vec{v}} + \mathrm{div}\ \overline{u'\,\vec{v}'} - \nu \Delta \bar{u} = 0$$

$$\left(\bar{v} \cdot \mathrm{grad}\right)\bar{\vec{v}} + \mathrm{div}\ \overline{v'\,\vec{v}'} - \nu \Delta \bar{v} = 0 \qquad (2/9)$$

$$\left(\bar{w} \cdot \mathrm{grad}\right)\bar{\vec{v}} + \mathrm{div}\ \overline{w'\,\vec{v}'} - \nu \Delta \bar{w} = 0$$

als Gleichungen für die zeitlich gemittelte Strömungsgeschwindigkeit.

In der neutralen Atmosphäre kann keine mittlere z-Komponente der Strömungsgeschwindigkeit auftreten: $\bar{w} = 0$
Wird ferner das Koordinatensystem so gewählt, daß die mittlere Strömungsgeschwindigkeit in x-Richtung zeigt, so erhält man die einfache Gleichung:

$$\frac{\partial \overline{u' w'}}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}$$

Einsetzen von $\nu = \frac{\mu}{\rho_0}$ und Integration ergibt:

$$\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \rho_0 \overline{u' w'} = \tau \qquad (2/1o)$$

τ ist eine Integrationskonstante, die Wandschubspannung.
Auch in dieser einfachen Form ist die Gleichung (2/1o) nicht lösbar, weil außer $\bar{u}$ auch $\overline{u' w'}$ unbekannt sind. Eine exakte Lösung würde voraussetzen, daß die Größe $\overline{u' w'}$ bekannt ist, man also außer den hier dargestellten Gleichungen für die mittlere Bewegung auch die Gleichungen für die Schwankungsbewegungen aufstellt und diese löst. Dabei stellt sich jedoch heraus, daß die Gleichungen für die Schwankungsbewegungen wiederum unbekannte Terme höherer Ordnung enthalten. Es handelt sich hier um das sogenannte Schließungsproblem, das grundsätzlich auftritt, wenn nichtlineare Gleichungen gemittelt werden. Für eine Lösung müssen weitere plausible oder experimentell ermittelte Annahmen gemacht werden.

Hier werden 2 Bereiche unterschieden:
1. Bereich nahe dem Erdboden: $z \to 0$
Die Randbedingung für den Erdboden, nach der die Normalkomponente der Strömungsgeschwindigkeit verschwinden muß, erzwingt: $w' = 0$ und damit $u' w' = 0$

$$\bar{u}(z) = \frac{\tau \cdot z}{\mu} \qquad z \to 0$$

In diesem wandnahen Bereich wird die Strömung durch die Reibungskräfte bestimmt. Statt der kinematischen Zähigkeit ν tritt hier die Zähigkeit μ auf. Trägheitskräfte spielen in diesem Bereich keine Rolle. Der Anstieg der Geschwindigkeit entspricht dem Anstieg in der laminaren Strömung. Der turbulente Charakter der

Strömung wirkt sich in diesem Bereich nicht auf das Geschwindigkeitsprofil aus.

2. Bei großem Abstand zur Wand kann die Lösung lediglich aus Skalierungsbetrachtungen gewonnen werden. In diesem Bereich überwiegt die Reynoldsche Schubspannung $\rho_0 \overline{u' w'}$ den Einfluß der Zähigkeit bei weitem. Es wird erwartet, daß der Geschwindigkeitsanstieg von z selbst abhängt. Die einzige Kombination von $\overline{u' w'}$, ρ_0 und τ, die hier eine sinnvolle dimensionsmäßig richtige Größe bildet, ist

$$\sqrt{\frac{\tau}{\rho_0}}\,\frac{1}{z}$$

so daß $$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \propto \sqrt{\frac{\tau}{\rho_0}}\,\frac{1}{z}$$

Die Integration ergibt:

$$\bar{u}\,(z) = a\, u_* \ln \frac{z + z_0}{z_0} \qquad (2/11)$$

für $z >> z_0$, mit $u_* = \sqrt{\frac{\tau}{\rho_0}}$, a = konstant

Die universelle Gültigkeit dieses logarithmischen Wandgesetzes konnte meßtechnisch nachgewiesen werden. Bild (2/2) zeigt Ergebnisse von Windkanalmessungen nach PRANDTL (1969).

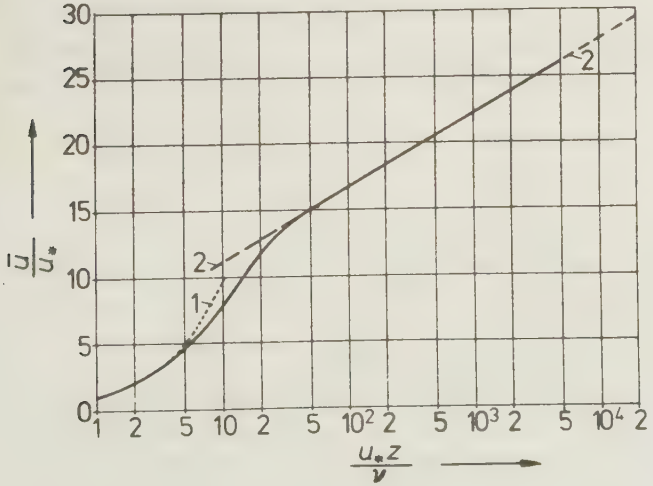

Bild 2/2

Windkanalmessung des Geschwindigkeitsprofils in der Nähe der Wand nach PRANDTL

Die theoretischen Werte für $z << z_0$ (Kurve 1) und $z >> z_0$ (Kurve 2) sind gestrichelt, Meßergebnisse stark ausgezeichnet dargestellt. Die Konstante a konnte meßtechnisch zu 2.5 bestimmt werden.

Die Rauhigkeitslänge z_0 und die Schubspannungsgeschwindigkeit u_* müssen meßtechnisch in Abhängigkeit von den meteorologischen Bedingungen und den Eigenschaften des Erdbodens gemessen werden. Nach LUMLEY & PANOFSKI liegen typische Werte für u_* in der Atmosphäre bei 0.3 m/s bis 1 m/s. z_0 hängt stark ab von der durchschnittlichen Höhe der Rauhigkeitspartikel des Erdbodens. TEUNISSEN gibt an, daß z_0 etwa 1/3o der durchschnittlichen Abmessung dieser Partikel beträgt. Er zitiert Ergebnisse von DAVENPORT (1965), nach denen für z_0 folgende Werte gelten:

flaches, offenes Land	z_0 : ≈ 1.5 - 6 cm
Waldland	z_0 : ≈ 2o - 1oo cm
Stadtgebiet	z_0 : ≈ 1.2 - 6 m

Bild 2/3 zeigt ein Geschwindigkeitsprofil für u_* = 0.5 m/s und z_0 = 3 cm

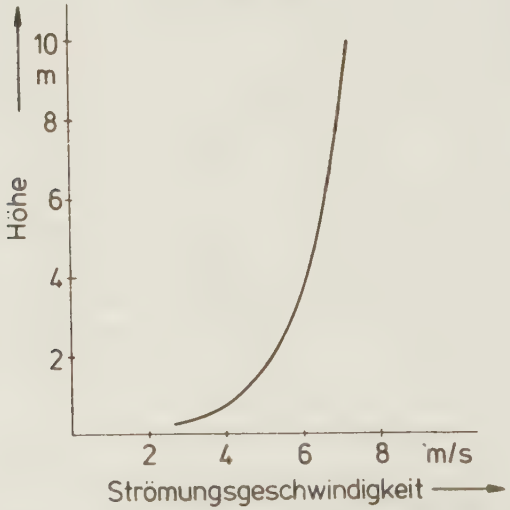

Bild 2/3

logarithmisches Geschwindigkeitsprofil für flaches Land

u_* = o.5 m/s ; z_0 = 3cm

Die hier angenommenen Bodenverhältnisse entsprechen den Meßbedingungen von SCHOLES & SARGENT (1971). Die Messungen fanden über Grasland statt. Die Annäherung für u_* ergibt eine mittlere Wind-

geschwindigkeit in 1.5 m Höhe von 4,89 m/s und stimmt mit von SCHOLES & SARGENT gemessenen Werten von 5 m/s in der gleichen Höhe gut überein.

Eine Verallgemeinerung des logarithmischen Windprofils für nichtneutrale atmosphärische Bedingungen hängt stark von Abweichungen des Temperaturverlaufs von dem der neutralen Atmosphäre ab. Ist die Temperaturabnahme mit der Höhe stärker als $1^0/100$ m, so bewirkt die Gravitation, daß leichtere Teilchen nach oben steigen. Die Atmosphäre ist instabil und die Auftriebskräfte verstärken sich. Im umgekehrten Fall dämpft die Gravitation die Turbulenz und die Atmosphäre ist stabil.

Durch Ähnlichkeitsbetrachtungen konnten auch für stabile und instabile atmosphärische Bedingungen allgemeine Temperatur- und Windprofile in der Nähe des Erdbodens angegeben werden /MONIN & OBUKOW (1954)/ . Für stabile Bedingungen lautet die Windprofilgleichung nach LUMLEY & PANOFSKY

$$\bar{u}\,(z) = a\,u_* \cdot \left(\ln \frac{z}{z_0} + \frac{\beta'\, z}{L'} \right) \qquad z >> z_0 \qquad (2/12)$$

mit β' = konstant.
Die Empfehlungen für β' liegen bei 4.5 - 7 . Im Sinne des worst case wurde $\beta' = 7$ /nach MC VEHIL (1962)/ angenommen.
Die Skalierungslänge L' hängt vom Verhältnis der von der Gravitation hervorgerufenen Auftriebskräfte (hier nach unten gerichtet) zu den durch die Strömung hervorgerufenen Reibungskräften in der Nähe der Erdoberfläche ab. In diesem Fall ist

$$L' = - \frac{u_*^{\,3}\, c_p\, \rho\, T_0}{H} \qquad (2/13)$$

mit H als mittlerem Wärmefluß in Richtung der z-Komponente, der konstant angenommen wird und hier negativ ist. T_0 ist die mittlere Temperatur der Atmosphäre in der Nähe des Erdbodens.

Das Temperaturprofil ist dem der Strömungsgeschwindigkeit ähnlich: Die Abweichung der Temperatur vom Mittelwert ist gegeben durch:

$$T\,(z) = T_0 + T_* \cdot \left(\ln \frac{z}{z_0} + \frac{\beta'\, z}{L'} \right) \qquad z >> z_0 \qquad (2/14)$$

T_* ergibt sich aus H:

$$T_* = - \frac{a}{u_*} \frac{H}{c_p \rho} \qquad (2/15)$$

Für praktische Anwendungsfälle ist H selten bekannt und nur schwierig meßbar. Mit Hilfe der Richardson Zahl Ri läßt sich L' aber aus zwei Messungen von $\bar{u}$ (z) und T(z) berechnen,

aus:

$$Ri = \frac{g}{T} \frac{\frac{d\,T}{d\,z}}{\left(\frac{d\,\bar{u}}{d\,z}\right)^2} \qquad (2/16)$$

und:

$$Ri = \frac{z/L'}{1 + \beta' \cdot z/L'} \qquad (2/17)$$

Damit ist es in praktischen Fällen möglich, Temperatur- und Windgeschwindigkeitsprofile aus nur 2 Messungen zu rekonstruieren. Bild 2/4 (Kurve 2) zeigt ein Beispiel des Temperatur- und Geschwindigkeitsprofils für stabile Bedingungen im Vergleich zur neutralen Atmosphäre mit:

$u_* = 0.5$ m/s, $z_0 = 3$ cm, $L' = 100$ m, $T_* = 0.45$ K, $T_0 = 283$ K

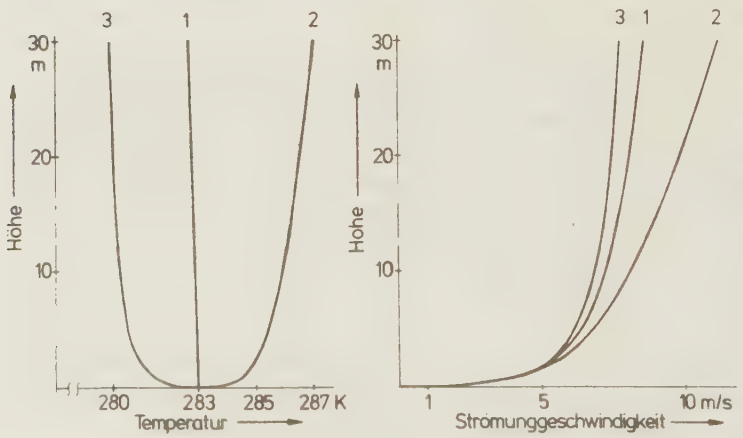

Bild 2/4

Einfluß des Temperaturverlaufs auf das Geschwindigkeitsprofil
(1) neutrale
(2) stabile
(3) instabile Bedingungen

Die Gültigkeit dieser Gleichung ist auf $z/L' \leq 0.3$ und $Ri \leq 0.25$ beschränkt, d. h. die Höhe bis zu der die logarithmischen Windprofile gültig sind, nimmt für stärker stabile Bedingungen ab. Für sehr stabile Bedingungen mit $Ri < 0.25$ kann kein allgemeines Windprofil mehr angegeben werden. Die starken nach unten gerichte-

ten Kräfte verhindern dann Instabilitäten, und die Turbulenz kommt zum Erliegen. Das Strömungsfeld ändert unter diesen Bedingungen seinen Charakter. Es neigt zu Schwerewellen /LIGHTHILL (1978), SYKES (1978)/. Doch auch in diesem Falle erzwingen die Reibungskräfte ein Verschwinden der Tangentialkomponente des Strömungsgeschwindigkeitsvektors unmittelbar am Erdboden, so daß Windprofile, die eine mit der Höhe über dem Erdboden zunehmende Strömungsgeschwindigkeit aufweisen, nicht unvernünftig sind. Die Messungen von CASANOVA - MARTINEZ (1976) bestätigen dies. Diesen Messungen läßt sich auch ein Hinweis auf das Verschwinden der Turbulenz bei sehr stabilen Bedingungen entnehmen: CASANOVA - MARTINEZ stellte fest, daß die Schalldruckpegelschwankungen unter diesen Bedingungen sehr stark abnehmen und kleiner als 2 dB sind.

Für instabile Bedingungen haben LUMLEY & PANOFSKI eine Gleichung für Windprofile mit größerem Gültigkeitsbereich angegeben:

$$\bar{u}\,(z) = a\, u_* \cdot \left(\ln \frac{z}{z_0} - \psi \left(\frac{z}{L'} \right) \right) \qquad (2/18)$$

Die Angaben für die allgemeine Funktion ψ differieren geringfügig. Im Sinne des worst - case wurde in Bild 2/5 der Verlauf nach KEYPS dargestellt.

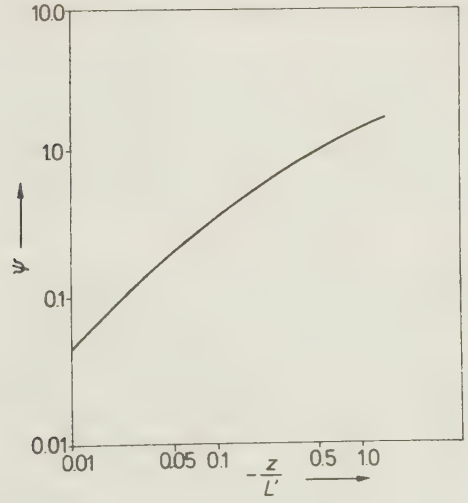

Bild 2/5

Verlauf der Funktion ψ

nach KEYPS

Der für die Meßtechnik wichtige Zusammenhang zwischen z/L' und der Richardson Zahl ist durch :

$$\frac{z}{L'} = \frac{Ri}{\sqrt{1 - \gamma' Ri}} \quad ; \quad \gamma' = 18 \qquad (2/19)$$

gegeben.

Der Gültigkeitsbereich der Gleichungen ist auch hier in der Höhe beschränkt durch

$$Ri > -1 \quad \hat{=} \quad \left|\frac{z}{L'}\right| < 0.48$$

Der Einfluß instabiler Bedingungen ist ebenfalls in Bild 2/4 dargestellt (Kurve 3). Hier wurde

$u_* = 0.5$ m/s, $z_0 = 3$ cm, $T_* = -0.5$ K, $L' = 117{,}1$ m angenommen.

Die Messungen von CASANOVA-MARTINEZ liegen bis auf die sehr stabilen Bedingungen im Bereich, der hier dargestellt ist.

Die Annahme des konstanten Wärmeflusses macht es möglich, die durch den Auftrieb hervorgerufene Strömungsgeschwindigkeitskomponente $\bar{w}(z)$ abzuschätzen. Es gilt:

$$\bar{w}(z) = \frac{H}{c_p \rho \left(T(z) - T_0 \right)}$$

Der Maximalwert von w ergibt sich in den unteren 3o m zu $w_{max} \approx 2$cm/s. Es kann also auch unter nicht-neutralen Bedingungen $\bar{w}$ vernachlässigt werden. Alle diese Aussagen über das Strömungsfeld bedürfen für sehr kleine Strömungsgeschwindigkeiten $\bar{u}_{max} \leq\approx 1$ m/s der Revision, weil in diesem Falle die Strömungsgeschwindigkeiten von den Auftriebskräften sehr stark beeinflußt werden.

Die Meßergebnisse von CASANOVA-MARTINEZ (1976) liegen im Bereich der in Bild 2/4 dargestellten atmosphärischen Bedingungen. Eine Ausnahme bilden hier die von CASANOVA-MARTINEZ gemessenen sehr stabilen Bedingungen während der Nachtstunden. Ein annähernd logarithmisches Windprofil über ebenem Erdboden kann also typisch

für die Atmosphäre bei Windgeschwindigkeiten von 5 m/s in 1.5 m Höhe und instabilen bis nicht zu stark stabilen Bedingungen angesehen werden.

3. Zur Schallausbreitung im Strömungsgeschwindigkeitsfeld der Atmosphäre

Will man die Schallausbreitung im Strömungsfeld der Atmosphäre meßtechnisch oder theoretisch untersuchen, so muß zunächst auf die Frage : Wie lassen sich die akustischen von strömungsmechanischen Größen unterscheiden ? eingegangen werden. Diese Frage ist nicht trivial, weil der Akustik und der Strömungsmechanik dieselben Gleichungen (1/1) - (1/4) zugrunde liegen und beide Gebiete dieselben Größen, Druck, Dichte, Temperatur und Strömungsgeschwindigkeit, betrachten. Wie BROWN & HALL (1978) darstellen, kann eine allseits befriedigende Definition der akustischen im Gegensatz zu den strömungsmechanischen Größen nicht gegeben werden. Es ist daher sinnvoll, diese Definition nur für die jeweils interessierende Aufgabenstellung anzugeben. Es wird zunächst auf den meßtechnischen Aspekt eingegangen.

Bei der Schallausbreitung in der Atmosphäre (speziell bei der Lärmausbreitung) interessiert der von einer externen Schallquelle an einem Immissionsort hervorgerufene Wechseldruck p' . Als Maß dafür wird der Schalldruckpegel $L = 1o \log \frac{p'^2}{p_0'^2} = 2o \log \frac{p'}{p_0'}$ ($p_0' = 2 \cdot 1o^{-5}$ Pa) gemessen in Dezibel (dB) verwendet. Bei Anwesenheit des atmosphärischen Strömungsfeldes wird aber am Immissionsort nicht nur der von der externen Schallquelle hervorgerufene Wechseldruck gemessen. Die durch die Turbulenz des Strömungsfeldes hervorgerufenen Schwankungen der Strömungsgeschwindigkeit bewirken zusätzliche lokale Wechseldrücke, die den von der externen Quelle hervorgerufenen Wechseldruck verdecken können /MORSE & INGARD (1968)/. Diese Wechseldrücke dürfen aber bei der hier betrachteten Aufgabenstellung nicht berücksichtigt werden, da sie auch ohne externe Quelle auftreten würden. Bei Messungen von Lärmausbreitungsvorgängen im Freien muß also Schallerzeugung durch Turbulenz am Empfängerort ausgeschlossen werden, was zu erheblichen meßtechnischen Schwierigkeiten führen kann. Eine meßtechnische Trennung der verschiedenen Anteile ist näherungsweise dann möglich , wenn der von der externen Schallquelle am Immissionsort hervorgerufene Schalldruckpegel wesentlich größer ist als die durch Turbulenz hervorgerufenen Wechseldrücke oder diese außerhalb des interessierenden akustischen Frequenzbereiches liegen.

Hier wird deutlich, daß unter meßtechnischen Gesichtspunkten die naheliegende Definition der akustischen Größen als Wechselanteil

des Druckes und der mit ihm verbundenen Wechselgrößen der Strömungsgeschwindigkeit (die Schnelle) der Temperatur und der Dichte nur unter bestimmten Bedingungen näherungsweise erfüllt ist. Kann Schallerzeugung durch Turbulenz am Empfängerort auf diese Weise weitgehend ausgeschlossen werden, so liegt lediglich Schallbeeinflussung durch das Strömungsfeld vor. Auf welche Art und Weise wird nun eine von einer externen Quelle ausgehende Schallwelle durch das Strömungsfeld der Atmosphäre beeinflußt ?

Wegen der komplizierten Struktur des turbulenten Strömungsfeldes der Atmosphäre müssen hier verschiedene Einflüsse getrennt betrachtet werden. Wie aus dem vorigen Kapitel hervorgeht, ist das Strömungsfeld der Atmosphäre im allgemeinen turbulent und setzt sich aus dem mittleren Strömungsfeld und der überlagerten Schwankungsbewegung zusammen. - Auf die Eigenschaften des mittleren Feldes wurde ausführlicher eingegangen. -

Die Untersuchung der Schallbeeinflussung orientiert sich an dieser Beschreibung des Strömungsfeldes. Einerseits wird der Einfluß des mitteleren zeitunabhängigen Strömungsfeldes untersucht, andererseits die Einflüsse der Turbulenz, die für das Auftreten der überlagerten Schwankungsbewegung verantwortlich ist. Das mittlere Strömungsfeld bewirkt, daß die durch die Welle transportierte akustische Energie nicht mehr geradlinig, sondern auf gekrümmten Bahnen transportiert, also gebrochen wird. Modelle, die den Einfluß des mittleren Strömungsfeldes beschreiben, werden daher häufig als Brechungsmodelle bezeichnet. Ihnen werden die Turbulenzmodelle für die Ausbreitung von akustischen Wellen - im folgenden kurz Turbulenzmodelle genannt - gegenübergestellt, die der Schallbeeinflussung durch den turbulenten Charakter des Strömungsfeldes Rechnung tragen. Die in der Literatur übliche begriffliche Unterscheidung zwischen Brechungs- und Turbulenzeinflüssen ist sicherlich nicht ganz glücklich. Einerseits ist die spezielle Form der Wind- und Temperaturprofile des mittleren Strömungsfeldes in der Nähe des Erdbodens durch das Auftreten der Turbulenz bedingt. Andererseits gehen auch die Turbulenzmodelle z. B. von TATARSKII (1971) oder in vereinfachter Form von CHERNOW (196o) von Brechung oder Streuung der akustischen Welle an den statistisch verteilten Wirbeln aus. PIERCY u.a. (1977), EMBLETON (198o), CHESSEL (198o) aber auch SCHOLES u. a. (1972) schließen aus Freifeldmessungen, daß die Turbulenz bei der Schallausbreitung über die hier interessierenden

Entfernungen bis ca 1oo m Ursache für die folgenden zwei Phänomene ist:

a) Die dem mittleren Strömungsfeld überlagerte Schwankungsbewegung führt zu Schwankungen in den Empfangspegeln. Der Einfluß der Pegelschwankungen wird bei Messungen durch Mittelung über eine hinreichend große Anzahl von Messungen gemindert.

b) Die Pegelminderungen in akustischen Schattenzonen gehen selten über ca 2o dB hinaus. Dies wird darauf zurückgeführt, daß die akustische Welle an den statistisch verteilten Wirbeln unterschiedlicher Größe gestreut wird und auf diese Weise Schall in die Schattenzonen transportiert wird.

Bei Messungen treten sowohl die von den Brechungsmodellen als auch die von den Turbulenzmodellen beschriebenen Effekte der Schallbeeinflussung immer gleichzeitig auf. Es gibt in der Regel keine meßtechnische Möglichkeit, beide Einflüsse voneinander zu trennen. Sollen die Ergebnisse von Brechungsmodell- oder auch Turbulenzmodellberechnungen getrennt meßtechnisch überprüft werden, so ist größte Vorsicht geboten, was Meßapparatur und -bedingungen angeht.

Eine vollständige theoretische Beschreibung der gemessenen Effekte kann nur durch Kombination von Brechungs- und Turbulenzmodellen erfolgen. Verläßliche Turbulenzmodelle sind aber für die hier interessierenden Schallausbreitungsbedingungen bisher nicht entwickelt worden. Nur wenige Autoren haben sich damit auseinandergesetzt /INGARD & MALING (1963), DAIGLE u.a. (1978)/. Beide Arbeiten erreichen nur eine schlechte Übereinstimmung zwischen Theorie und Meßwerten. Die Abweichungen zwischen gemessenen und berechneten Schalldruckpegeln von > 1o dB beruhen einerseits auf der für die Strömungsverhältnisse nahe dem Erdboden zu stark vereinfachenden Modellannahme der isotropen und homogenen Turbulenz. Diese Annahme bedeutet, daß die örtliche Verteilung der Wirbel gleichmäßig ist und die Schwankungsbewegung keine Vorzugsrichtung aufweist, wenn sich der Beobachter mit der als konstant oder null angenommenen mittleren Strömungsgeschwindigkeit bewegt ("frozen turbulence").

Im weiteren Verlauf der Arbeit wird auf Turbulenzmodelle nicht näher eingegangen. Die für die Meßtechnik und die Turbulenzmodelle auftretende Schwierigkeit der Trennung von akustischen und strö-

mungsmechanischen Größen tritt bei den Brechungsmodellen nicht auf. Da Brechungsmodelle lediglich den zeitinvarianten Teil des atmosphärischen Strömungsfeldes betrachten, können in Anlehnung an die linearen akustischen Gleichungen für ruhendes Medium die akustischen Größen als zeitveränderliche isentropische Druck-, Dichte-, Temperatur- und Strömungsgeschwindigkeitsänderungen definiert werden.

3.1 Voraussetzungen der Brechungsmodelle

Die Lösung der Navier-Stokes-Gleichung (1/2) bietet, wie schon in Kapitel 2 deutlich wird, einige Schwierigkeiten. Der im allgemeinnen turbulente Charakter des atmosphärischen Strömungsfeldes wird aber nur unter Berücksichtigung der Zähigkeitsterme richtig erfaßt. Will man den Einfluß des mittleren Strömungsfeldes auf die Schallausbreitung beschreiben, so kann unter gewissen Voraussetzungen eine Lösung der Navier-Stokes-Gleichung vermieden werden, indem die wesentlichen Eigenschaften des mittleren Strömungsfeldes a priori in die (Eulersche) Bewegungsgleichung eingebracht werden. Alle bisher untersuchten Brechungsmodelle gehen von der Euler-Gleichung aus. Sie machen die folgenden Annahmen :

1. Der Erdboden ist eben.
   Diese Bedingung erfordert, daß das untersuchte Gebiet oberhalb der größten Erdbodenunebenheiten liegt, die durch die Rauhigkeitslänge z_0 charakterisiert sind.

2. Das Strömungsfeld ist zeitunabhängig und geschichtet (Scherströmung): Der Strömungsgeschwindigkeitsvektor verläuft parallel zum Erdboden und hängt lediglich von der Höhe z über dem Erdboden ab. Das Strömungsgeschwindigkeitsprofil entspricht dem der mittleren Strömungsgeschwindigkeit für $z > z_0$.

3. Die Temperatur hängt ebenfalls lediglich von der Höhe z ab.

4. Der Druck im Strömungsfeld ist konstant.

5. Einflüsse der Zähigkeit, Wärmeleitung und Gravitation wirken sich lediglich auf das Strömungsfeld aus. Bei gegebenem Strömungsgeschwindigkeitsverlauf können sie vernachlässigt werden. Diese Bedingung impliziert, wie schon Punkt 1, daß die zähe Unterschicht $z < z_0$ aus der Betrachtung ausgeschlossen bleibt. Für die akustische Welle bedeutet dies, daß die klassische Absorption vernachlässigt wird. Es konnte gezeigt werden /vergl. MORFEY (1979)/ daß die größten Absorptionsbeiträge ohnehin nicht von der klassischen Absorption hervorgerufen werden, sondern von Relaxationseffekten herrühren, die ihrerseits stark frequenz- und luftfeuchtigkeitsabhängig sind. Bei der Schall-

ausbreitung im Freien werden diese durch nachträgliche Schalldruckpegelabschläge proportional zur Weglänge der Schallausbreitung berücksichtigt.

6. Das Strömungsfeld ist langsam veränderlich im Verhältnis zur Wellenlänge. Diese Bedingung macht es möglich, geometrisch-akustische Methoden anzuwenden und mit Hilfe von Schallstrahlen die örtliche Schalldruckverteilung zu berechnen (ray-tracing). Die Beschränkung auf kleine Wellenlängen im Vergleich zu typischen Strömungsfeldgradienten ermöglicht es, die Reflexion gegenüber der Brechung zu vernachlässigen. Weiterhin kann dann ein direkter Einfluß der Gravitation auf die Schallausbreitung ausgeschlossen werden /LIGHTHILL (1978)/.

3.2 Bisherige Untersuchungen zu Brechungsmodellen

Brechungsmodelle sind der älteste Ansatz, um die Einflüsse des atmosphärischen Strömungsfeldes zu erklären. Bereits RAYLEIGH (1879) hat versucht, durch Verallgemeinerung des Snellius'schen Brechungsgesetzes die Existenz von akustischen Schattenzonen zu erklären. Lange Zeit blieb dieses Phänomen unbeachtet, bis im Zuge der Erforschung der Lärmausbreitung im Freien RAYLEIGH's Vorschlag aufgegriffen wurde /u. a. HARRIS (1957), MORSE & INGARD (1961), KRIEBEL (1972)/. Eine genauere Untersuchung von THOMPSON (1972), (1974a), (1974b) und UNGINCIUS (1972) für geschichtetes Strömungsfeld zeigte jedoch, daß in RAYLEIGH's Vorschlag die Gruppengeschwindigkeit nicht richtig erfaßt wird. UNGINČIUS (1965) fand, daß sich die Charakteristiken der Eikonalgleichung aus 3 gekoppelten Differentialgleichungen 2. Ordnung berechnen lassen, die jedoch schlecht integrierbar sind. THOMPSON (1972) konnte mit Hilfe der Charakteristikenmethode nach COURANT & HILBERT (1968) zeigen, daß sich im Falle des geschichteten Strömungsfeldes die Differentialgleichungen für die Schallstrahlen auf die Lösung einfacher Integrale zurückführen lassen. UNGINČIUS' (1972) Rechnung ergab, daß entlang der Charakteristiken der Eikonalgleichung auch im strömenden Medium das Fermat'sche Prinzip erfüllt ist. CHESSEL (1973) hat ein Differentialgleichungssystem in anderer Form für diese Charakteristiken angegeben. Es stimmt aber mit den Gleichungen von THOMPSON (1973) überein. LIGHTHILL (1978) hat äquivalente Gleichungen aus kinematischen Überlegungen abgeleitet.

In der Folgezeit sind die Ergebnisse von THOMPSON für geschichtete Strömungsfelder von CASANOVA-MARTINEZ (1976a), (1976b) zur Berechnung der Schallausbreitung in der Atmosphäre angewandt worden. Die Übereinstimmung zwischen gemessenen und berechneten Werten ist jedoch relativ schlecht. Die Abweichung beträgt z. B. über Entfernungen von 1500 m bis zu + 4.1 dB, - 4.5 dB. Dies ist u. a. darauf zurückzuführen, daß das Strömungsgeschwindigkeitsprofil nicht genau erfaßt wurde.

CASANOVA-MARTINEZ fand auch, daß die Ergebnisse stark vom Profil der Erdoberfläche abhängig sind. Darüber hinaus ergaben seine Messungen, daß die Pegelschwankungen bei stabilen atmosphärischen Be-

dingungen sehr klein werden (< ± 2 dB). Dies spricht dafür, daß Turbulenz nicht auftritt und daher der Einfluß der Schwankungsbewegung auf die Schallausbreitung unter diesen Umständen vernachlässigt werden kann. DE JONG (1974), DE JONG & STUSNICK (1976) und NIJS (1980) haben mit Hilfe von Brechungsmodellen für geschichtetes Medium versucht, den Windeinfluß auf die Schalldämmung von Lärmschutzwällen und -wänden zu berechnen und mit Messungen im Windkanal verglichen. Auf die Ergebnisse dieser Autoren wird in Kapitel 5.1 eingegangen. Eine wesentliche ihren Berechnungen zugrunde liegende Annahme, nämlich die des geschichteten Strömungsfeldes, ist jedoch nicht erfüllt.

Der Grund dafür, daß bisher Berechnungen des Schalldruckpegels für nicht-geschichtete Strömungsfelder nicht durchgeführt wurden, wird anhand der Gleichungen für die Brechungsmodelle deutlich.

3.3 Die Gleichungen für Brechungsmodelle

Es wird nun gezeigt, zu welchen Vereinfachungen die Annahmen des Kapitels 3.1 führen. Die Annahme 5 ermöglicht, die Viskositäts- und Wärmeleitfähigkeitsterme in der Bewegungsgleichung zu vernachlässigen. Sie ist Voraussetzung dafür, daß Entropieänderungen in der Energiegleichung nicht auftreten. Die Energiegleichung (1/3) nimmt die einfache Form

$$\frac{D\,E}{D\,t} = \frac{p}{\rho^2}\,\frac{D\,\rho}{D\,t}$$

an.

Die Energieänderung ruft gemäß

$$\frac{D\,E}{D\,t} = c_v\,\frac{D\,T}{D\,t}$$

eine Temperaturänderung hervor.

Durch Gleichsetzen dieser beiden Beziehungen ergibt sich mit Hilfe der Zustandsgleichung (1/4):

$$\rho\,c_p\,\frac{D\,T}{D\,t} = \frac{D\,p}{D\,t}$$

und unter Verwendung von Gleichung (1/5) können dann die Gleichungen in folgender Form geschrieben werden:

Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial\,\rho}{\partial\,t} + \vec{v}\ \mathrm{grad}\ \rho + \rho\ \mathrm{div}\ \vec{v} = 0 \qquad (3.3/1)$$

Euler'sche Bewegungsgleichung

$$\rho\,\frac{\partial\,\vec{v}}{\partial\,t} + \rho\left(\vec{v}\cdot\mathrm{grad}\right)\vec{v} + \mathrm{grad}\ p = 0 \qquad (3.3/2)$$

Zustandsgleichung

$$p - c_p\,\frac{\gamma - 1}{\gamma}\,\rho\,T = 0 \qquad (3.3/3)$$

Energiegleichung

$$\rho\, c_p \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v}\ \mathrm{grad}\ T \right) - \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{v}\ \mathrm{grad}\ p \right) = 0 \qquad (3.3/4)$$

In dieser Form beinhalten die Gleichungen (3.3/1) - (3.3/4) sowohl strömungsmechanische als auch akustische Größen.

Wie lassen sich nun die strömungsmechanischen Größen von den akustischen Größen trennen ?
Wie bereits erwähnt, ist eine allgemeine Trennung von Akustik und Strömungsmechanik für beliebiges zeitveränderliches Strömungsfeld nicht möglich /BROWN & HALL (1978)/. Bei den Brechungsmodellen wird dieses Problem wegen der Voraussetzung des zeitunabhängigen Strömungsfeldes erheblich einfacher. Mit dieser Annahme ist es nach BLOKHINTZEV (1946 a), (1946 b) möglich, die akustischen Gleichungen auf ähnliche Weise zu gewinnen wie im ruhenden Medium. Per Definition sind die akustischen Größen im ruhenden Medium kleine isentropische Druck-, Dichte-, Temperatur- und Geschwindigkeitsstörungen um den konstanten Grundzustand $p = p_0$, $\rho = \rho_0$, $T = T_0$ und $\vec{v} = 0$. Die linearen akustischen Gleichungen ergeben sich dann durch Linearisierung der allgemeinen Gleichungen (3.3/1) - (3.3/4) um diesen Grundzustand.

BLOKHINTZEV hat diese Definition für den Fall der akustischen Auslenkung um den Grundzustand eines inhomogenen und zeitunabhängigen Strömungsfeldes erweitert. Er erhielt für konstante Entropie die folgenden akustischen Gleichungen durch Linearisierung der Gleichungen (3.3/1) - (3.3/4) um den Grundzustand des strömenden Mediums:
$p = p_0\,(x, y, z)$, $\rho = \rho_0\,(x, y, z)$, $T = T_0\,(x, y, z)$ und
$\vec{v} = \vec{v}_0\,(x, y, z)$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \vec{v}_0\ \mathrm{grad}\ \rho' + \vec{v}'\ \mathrm{grad}\ \rho_0 + \rho_0\ \mathrm{div}\ \vec{v}' + \rho'\ \mathrm{div}\ \vec{v}_0 = 0 \qquad (3.3/5)$$

$$\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + (\mathrm{rot}\ \vec{v}_0) \times \vec{v}' + (\mathrm{rot}\ \vec{v}') \times \vec{v}_0 + \mathrm{grad}\,(\vec{v}_0\ \vec{v}') = - \frac{1}{\rho_0}\ \mathrm{grad}\ p' + \frac{p'}{\rho_0^2}\ \mathrm{grad}\ p_0 \qquad (3.3/6)$$

$$\frac{d\,p'}{d\,\rho'} = c^2 \qquad (3.3/7)$$

Die akustischen Größen werden hier durch den Index ' gekennzeichnet. Sie hängen außer von den Ortskoordinaten x, y, z auch von der Zeit t ab.
Wird die letzte Gleichung in die erste Gleichung eingesetzt, so entsteht ein partielles lineares Differentialgleichungssystem mit den 5 abhängigen Variablen ρ', p' und $\vec{v}' = (u', v', w')$
den 4 unabhängigen Variablen x, y, z und t
mit den nicht-konstanten Koeffizienten p_0, ρ_0, T_0 und $\vec{v}_0$.
p_0, ρ_0, T_0 und $\vec{v}_0$ werden von den Eigenschaften des Strömungsfeldes bestimmt. Sie beeinhalten die inhomogenen und anisotropen Eigenschaften, die die akustische Welle "sieht". Die Strömungsfeldkoeffizienten müssen ihrerseits das folgende strömungsmechanische Gleichungssystem erfüllen:

$$\operatorname{div}\,(\,\rho_0\,\vec{v}_0\,) = 0 \qquad (3.3/8)$$

$$\rho_0\left(\vec{v}_0 \cdot \operatorname{grad}\right)\vec{v}_0 + \operatorname{grad} p_0 = 0 \qquad (3.3/9)$$

$$p_0 - c_p\,\frac{\gamma - 1}{\gamma}\,\rho_0\,T_0 = 0 \qquad (3.3/10)$$

$$\rho_0\,c_p\,\vec{v}_0\,\operatorname{grad} T_0 - \vec{v}_0\,\operatorname{grad} p_0 = 0 \qquad (3.3/11)$$

Möchte man den Strömungsfeldeinfluß auf die Schallausbreitung berechnen, so muß zuerst das Gleichungssystem (3.3/8) - (3.3/11) gelöst werden. Die dadurch gewonnenen ortsabhängigen Strömungsfeldkoeffizienten werden in die Gleichungen (3.3/5) - (3.3/7) eingesetzt. Erst dann kann das akustische Gleichungssystem gelöst werden. Die Lösung der strömungsmechanischen Gleichungen macht erhebliche Schwierigkeiten. Bei (3.3/8) - (3.3/11) handelt es sich um ein partielles Differentialgleichungssystem, das zudem noch stark nichtlinear ist und wenn überhaupt, so nur mit numerischen Methoden gelöst werden kann. Eine solche numerische Lösung ist aber sehr aufwendig, weil die Größen p_0, ρ_0, $\vec{v}_0$ in wenigstens 2 Dimensionen berechnet werden müssen. Aber auch die numerische Lösung

des nichtlinearen partiellen Differentialgleichungssystemes ist sehr schwierig, weil dabei Genauigkeits- und Stabilitätsprobleme auftreten. So ist es auch nicht verwunderlich, daß bisher erst einfachere Probleme untersucht wurden, die eine Lösung der Strömungsfeldgleichungen nicht erforderlich machen. Dazu gehört THOMPSON's Brechungsmodell für die geschichtete Atmosphäre über ebenem Erdboden. Aber auch für aeroakustische Anwendungen /vergl. z. B. GOLDSTEIN (1978)/ werden häufig Scherströmungen untersucht.

Im geschichteten Strömungsfeld besitzt der Strömungsgeschwindigkeitsvektor nur die 2 Komponenten $\vec{v}_0(z) = (u_0(z), v_0(z), 0)$, die nicht von x und y abhängen. In diesem Fall sind die Gleichungen (3.3/8)-(3.3/11) für $\rho = \rho_0 =$ konstant, $p = p_0 =$ konstant und $T = T_0 =$ konstant automatisch erfüllt. Die akustischen Gleichungen nehmen dann die von THOMPSON (1972) angegebene Form

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \vec{v}_0(z) \text{ grad } \rho' + \rho_0 \text{ div } \vec{v}' = 0 \qquad (3.3/12)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + \left(\vec{v}_0(z) \cdot \text{grad}\right) v' + \frac{1}{\rho_0} \text{ grad } p' = 0 \qquad (3.3/13)$$

$$\frac{d p'}{d \rho'} = c^2 \qquad (3.3/14)$$

an.

Es gibt aber auch Beispiele für die Schallausbreitung in der Atmosphäre, bei denen die Annahme des geschichteten Strömungsfeldes nicht erfüllt ist. Dies ist dann der Fall, wenn das Strömungsfeld durch ein großes Hindernis gestört ist. Bild 3/1 zeigt einen solchen Fall, die Umströmung eines Lärmschutzwalles. In großem Abstand zum Wall ergibt sich über dem relativ ebenen Erdboden ein geschichtetes Strömungsfeld mit logarithmischem Windprofil. Die Stromlinien zeigen, daß das Strömungsfeld in der Umgebung des Walles nicht mehr geschichtet ist. Deshalb ist es nicht mehr möglich, THOMPSON's Gleichungen zu benutzen. Vielmehr müßte auf BLOKHINTZEV's Gleichungen (3.3/8) - (3.3/11) und (3.3/12) - (3.3/14) zurückgegriffen werden.

Außer den großen Schwierigkeiten, die sich bei der Lösung dieser Gleichungen ergeben, sprechen noch weitere Gründe dafür, sich nach

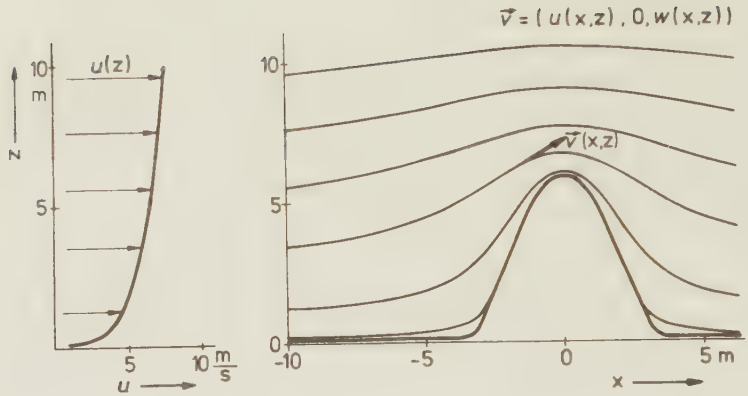

Bild 3/1: Umströmung eines Lärmschutzwalles

anderen Lösungsmöglichkeiten umzusehen:

Die Brechungsmodelle sollen die Eigenschaften des mittleren Strömungsfeldes in der Atmosphäre beschreiben, wie sie durch die Gleichungen (2/8) und (2/1o) ausgedrückt werden. Durch die Annahme des logarithmischen Windprofils ist die Gleichung (2/1o) für $z > z_o$ erfüllt. Vergleicht man nun (3.3/8) mit (2/8), so sieht man, daß BLOKHINTZEV's Gleichung eine kompressible Strömung beschreibt. Das mittlere Strömungsfeld der Atmosphäre ist dagegen inkompressibel. PRANDTL (1969) gibt an, daß für 5o m/s und Höhen bis zu 100 m über dem Erdboden die Volumenänderungen der Luft rund 1 % betragen. Die Annahme einer inkompressiblen Strömung beinhaltet unter diesen Bedingungen dann höchstens einen Fehler von 1 %.

Es liegt also nahe, BLOKHINTZEV's Gleichungen durch die Annahme der Inkompressibilität zu vereinfachen. Doch tritt hier eine Schwierigkeit auf: In einer inkompressiblen Strömung können keine akustischen Wellen auftreten, die sich ja durch isentropische Dichte-, Druck-, Temperatur- und Strömungsgeschwindigkeitsänderungen auszeichnen.

Wie ist es möglich, die akustische Wellenausbreitung in einem Strömungsfeld zu beschreiben, das den durch die Gleichungen (2/8)

und (2/10) beschriebenen Eigenschaften der Inkompressibilität und des Strömungsgeschwindigkeitsprofils gerecht wird?

Im folgenden Kapitel wird gezeigt, daß eine Störungsrechnung dies leisten kann.

4. Asymptotische Gleichungen für die Schallausbreitung im inhomogenen zeitinvarianten Strömungsgeschwindigkeitsfeld

4.1 Die Strömungsfeldgleichungen

4.1.1 Skalierung der Strömungsfeldgleichungen

Bei der Anwendung von Störungsrechnungsmethoden ist es zweckmäßig, alle abhängigen und unabhängigen Variablen durch Bezug auf geeignete Größen dimensionslos zu machen, so daß die Größen des dimensionslosen Gleichungssystems in der Größenordnung 1 liegen. Häufig lassen sich dann kleine oder große Störparameter ε_ν extrahieren, die dann eine Lösung des Gleichungssystems in Form eines Störansatzes (asymptotische Lösung für $\varepsilon_\nu \to 0$ bzw. $\varepsilon_\nu \to \infty$) erlauben. Im Prinzip können die Bezugsgrößen beliebig gewählt werden. Doch nur bei Wahl geeigneter Bezugsgrößen können die im Problem implizit enthaltenen Skalen aufgedeckt und sinnvolle Störparameter extrahiert werden. Das eigentliche Problem der Störungsrechnung liegt dann darin, diese geeigneten Bezugsgrößen zu finden.

Ausgangspunkt der Betrachtung ist das Gleichungssystem (3.3/1) - (3.3/4), das sowohl den akustischen als auch den strömungsmechanischen Anteil des hier behandelten Problems beinhaltet. Es wird angenommen, daß in großer Entfernung vom Hindernis ein zeitinvariantes geschichtetes Strömungsfeld vorhanden ist. (Bild 3/1) Zur Skalierung der Strömungsgeschwindigkeit wird nun ein mittlerer Wert v_r im Strömungsprofil der geschichteten Atmosphäre als Bezugsgröße gewählt. Es ist nicht notwendig, für diesen Wert den exakten mathematischen Mittelwert zu verwenden. Die Skalierung soll lediglich eine Buchführung über die Größenordnung der verschiedenen Terme ermöglichen und verhindern, daß dimensionslose Größen, die z. B. eine Zehnerpotenz und mehr auseinanderliegen, als von gleicher Größenordnung betrachtet werden. Als Bezugsgrößen ρ_r und T_r von ρ bzw. T werden die Werte von ρ und T am Ort von v_r gewählt.

Die Größen $\vec{v}$, ρ und T werden durch Division durch die Bezugsgrößen dimensionslos. Alle dimensionslosen Strömungsfeldgrößen werden mit dem Index * gekennzeichnet.

Man erhält:

$$\vec{v}^* = \frac{\vec{v}}{v_r} \qquad (4.1.1/1)$$

$$\rho^* = \frac{\rho}{\rho_r} \qquad (4.1.1/2)$$

$$T^* = \frac{T}{T_r} \qquad (4.1.1/3)$$

Die Skalierung des Druckes ergibt sich aus folgender Überlegung: Die Bewegungsgleichung (3.3/2) kann für zeitinvariante Strömung und konstante Dichte $\rho = \rho_r$ in folgender Form geschrieben werden:

$$\text{grad } \frac{|\vec{v}|^2}{2} - \vec{v} \times \text{rot } \vec{v} + \frac{1}{\rho_r} \text{grad } p = 0$$

Skalarmultiplikation mit $\vec{v}$ ergibt

$$\vec{v} \cdot \text{grad } \frac{|\vec{v}|^2}{2} + \frac{\vec{v}}{\rho_r} \text{grad } p = 0$$

Wird diese Gleichung entlang einer Stromlinie, die durch $\vec{v} = \text{konstant} = v_r$ gekennzeichnet ist, integriert, so erhält man

$$p - p_r = \frac{1}{2} \rho_r v_r^2$$

p_r ist der statische Druck, $\frac{\rho}{2} v_r^2$ der durch die Strömung hervorgerufene Staudruck. Der aktuelle Druck p in der Strömung ist dann die Summe aus Staudruck und statischem Druck, d. h. die Strömung ruft eine Störung des Druckes $p - p_r$ hervor. Durch Bezug auf $\rho_r v_r^2$ erhält man dann den dimensionslosen Druck p^*.

$$p^* = \frac{p - p_r}{\rho_r v_r^2} \qquad (4.1.1/4)$$

Der Faktor 1/2 ist bei der Wahl der Bezugsgrößen unwesentlich. Er ist von der Größenordnung 1. Ein konstanter Faktor, der bei den Bezugsgrößen weggelassen wird, taucht dann in den dimensionslosen Gleichungen auf. Eine ähnliche Skalierung wurde von GOLDSTEIN (1976) vorgeschlagen, der die Gleichungen von BLOKHINTZEV für die in aeroakustischen Anwendungen vorkommenden

hohen Strömungsgeschwindigkeiten mit Hilfe einer Störungsrechnung hergeleitet hat. Bei GOLDSTEIN wird in der Bezugsgröße statt der Strömungsgeschwindigkeit v_r die Schallgeschwindigkeit benutzt. Für strömungsmechanische Anwendungen wurde die hier vorgenommene Skalierung von LAGERSTROM (1956) vorgeschlagen und von VASANTA RAM (1975) im Rahmen der Erweiterung der Grenzschichttheorie benutzt.

Werden die Skalierungsgleichungen (4.1.1/1) - (4.1.1/4) nach den dimensionsbehafteten Größen aufgelöst und diese in die Gleichungen (3.3/1) - (3.3/4) eingesetzt, so ergibt sich:

$$v_r \rho_r \cdot \left(\frac{1}{v_r} \frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \vec{v}^* \operatorname{grad} \rho^* + \rho^* \operatorname{div} \vec{v}^* \right) = 0 \qquad (4.1.1/5)$$

$$v_r^2 \rho_r \cdot \left(\frac{\rho^*}{v_r} \frac{\partial \vec{v}^*}{\partial t} + \rho^* \left(\vec{v}^* \cdot \operatorname{grad} \right) \vec{v}^* + \operatorname{grad} p^* \right) = 0 \qquad (4.1.1/6)$$

$$p_r \cdot \left(1 + \frac{v_r^2 \rho_r}{p_r} p^* - \frac{\rho_r T_r}{p_r} c_p \frac{\gamma - 1}{\gamma} \rho^* T^* \right) = 0 \qquad (4.1.1/7)$$

$$v_r \rho_r T_r c_p \cdot \left(\rho^* \cdot \left(\frac{1}{v_r} \frac{\partial T^*}{\partial t} + \vec{v}^* \operatorname{grad} T^* \right) \right) - \frac{v_r^2}{T_r c_p} \cdot \left(\frac{1}{v_r} \frac{\partial p^*}{\partial t} + \vec{v}^* \operatorname{grad} p^* \right) = 0 \qquad (4.1.1/8)$$

Nachdem die Größen p, ρ, T und v skaliert wurden, sollen nun deren Ableitungen skaliert werden. Mit Hilfe der Länge L_r kann eine neue Längenskala eingeführt werden, durch die die Differentialquotienten der Größen zu 1 skaliert werden:

$$x^* = \frac{x}{L_r} \; ; \; y^* = \frac{y}{L_r} \; ; \; z^* = \frac{z}{L_r} \qquad (4.1.1/9)$$

Man erhält dann für die Differentialquotienten:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x^*}{\partial x}\,\frac{\partial}{\partial x^*} = \frac{1}{L_r}\,\frac{\partial}{\partial x^*}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial y^*}{\partial y}\,\frac{\partial}{\partial y^*} = \frac{1}{L_r}\,\frac{\partial}{\partial y^*} \qquad (4.1.1/10)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial z^*}{\partial z}\,\frac{\partial}{\partial z^*} = \frac{1}{L_r}\,\frac{\partial}{\partial z^*}$$

Die Länge L_r ist so zu wählen, daß die lokale Ableitung von $\vec{v}^*$ nach x*, y* oder z* zu 1 wird.

Im zeitunabhängigen Strömungsfeld ist $\frac{\partial}{\partial t} = 0$. Hier soll jedoch für die spätere akustische Anwendung eine Skalierung von t vorgenommen werden. Einzig sinnvolle Bezugszeit t_r^* ist diejenige, die ein Strömungselement der Geschwindigkeit v_r für den Weg L_r benötigt:

$$t_r = \frac{L_r}{v_r}$$

Daraus ergibt sich:

$$t^* = \frac{t}{t_r} \qquad (4.1.1/11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial t^*}{\partial t}\,\frac{\partial}{\partial t^*} = \frac{v_r}{L_r}\,\frac{\partial}{\partial t^*} \qquad (4.1.1/12)$$

Nunmehr können die dimensionslosen Differentialoperatoren

$$\text{grad}^* = \frac{\partial}{\partial x^*}\,,\ \frac{\partial}{\partial y^*}\,,\ \frac{\partial}{\partial z^*} \qquad (4.1.1/13)$$

und

$$\text{div}^* = \frac{\partial}{\partial x^*} + \frac{\partial}{\partial y^*} + \frac{\partial}{\partial z^*} \qquad (4.1.1/14)$$

definiert werden.

Werden die Beziehungen (4.1.1/1o), (4.1.1/12), (4.1.1/13) und (4.1.1/14) in die Gleichungen (4.1.1/5) - (4.1.1/8) eingesetzt, so erhält man nach Multiplikation mit L_r :

$$v_r \rho_r \cdot \left(\frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \vec{v}^* \text{ grad}^* \rho^* + \rho^* \text{ div}^* \vec{v}^* \right) = 0 \qquad (4.1.1/15)$$

$$v_r^2 \rho_r \cdot \left(\rho^* \frac{\partial \vec{v}^*}{\partial t^*} + \rho^* \left(\vec{v}^* \cdot \text{grad} \right) \vec{v}^* + \text{grad}^* p^* \right) = 0 \qquad (4.1.1/16)$$

$$p_r \cdot \left(1 + \frac{v_r^2 \rho_r}{p_r} p^* - \frac{\rho_r T_r}{p_r} c_p \frac{\gamma - 1}{\gamma} \rho^* T^* \right) = 0 \qquad (4.1.1/17)$$

$$v_r \rho_r T_r c_p \cdot \left(\rho^* \cdot \left(\frac{1}{v_r} \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \vec{v}^* \text{ grad}^* T^* \right) \right) - \frac{v_r^2}{T_r c_p} \cdot \left(\frac{1}{v_r} \frac{\partial p^*}{\partial t^*} + \vec{v}^* \text{ grad}^* p^* \right) = 0 \qquad (4.1.1/18)$$

Aus den Größen p_r, ρ_r, T_r können ferner die Bezugsschallgeschwindigkeit c_r gemäß

$$c_r^2 = c_p \, (\gamma - 1) \, T_r = \gamma \frac{p_r}{\rho_r} \qquad (4.1.1/19)$$

und die dimensionslose MACH-Zahl:

$$Ma = \frac{v_r}{c_r} \qquad (4.1.1/2o)$$

gebildet werden.
Setzt man nun die Beziehungen (4.1.1/19) und (4.1.1/2o) in die Geichungen (4.1.1/15) - (4.1.1/18) ein und dividiert jede Gleichung durch die jeweils von den konstanten Bezugsgrößen gebildeten gemeinsamen Faktoren, so erhält man das folgende dimensionslose strömungsmechanisch-akustische Gleichungssystem:

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \vec{v}^* \text{ grad}^* \rho^* + \rho^* \text{ div}^* \vec{v}^* = 0 \qquad (4.1.1/21)$$

$$\rho^* \frac{\partial \vec{v}^*}{\partial t^*} + \rho^* \left(\vec{v}^* \cdot \text{grad} \right) \vec{v}^* + \text{grad } p^* = 0 \qquad (4.1.1/22)$$

$$1 + Ma^2 \gamma p^* - \rho^* T^* = 0 \qquad (4.1.1/23)$$

$$\rho^* \cdot \left(\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \vec{v}^* \, \mathrm{grad}^* T^* \right) - (\gamma - 1) \, Ma^2 \cdot \left(\frac{\partial p^*}{\partial t^*} + \vec{v}^* \, \mathrm{grad}\, p^* \right) = 0 \qquad (4.1.1/24)$$

In dieser Form ist das Gleichungssystem der Ausgangspunkt für alle weiteren Berechnungen. Die Skalierung hat bewirkt, daß alle Größen und ihre Ableitungen die Größenordnung 1 haben. Es taucht weiterhin ein einziger dimensionsloser Faktor Ma^2 auf. Für die in der Oberflächenschicht der Atmosphäre bis 3o m Höhe häufigen Strömungsgeschwindigkeiten von bis zu ≃ 20 m/s und einer Bezugsschallgeschwindigkeit von ≃ 33o m/s wird Ma ≃ o.o5. Dieser kleine Faktor bietet sich als Störgröße für eine Störungsrechnung an. Es wird eine asymptotische Lösung der Gleichungen (4.1.1/21) - (4.1.1/24) für Ma → 0 gesucht. Die hier im Hinblick auf die akustischen Gleichungen mitberücksichtigten Ableitungen nach der Zeit können nunmehr gleich 0 gesetzt werden, da das Strömungsfeld als zeitinvariant und dem zeitlich gemittelten Strömungsfeld der Atmosphäre gleichgesetzt wurde. Damit ergeben sich die folgenden strömungsmechanischen Gleichungen mit dem Störparameter Ma^2 :

$$\vec{v}^* \, \mathrm{grad}^* \rho^* + \rho^* \, \mathrm{div}^* \vec{v}^* = 0 \qquad (4.1.1/25)$$

$$\rho^* \left(\vec{v}^* \cdot \mathrm{grad}^* \right) \vec{v}^* + \mathrm{grad}^* p^* = 0 \qquad (4.1.1/26)$$

$$1 + Ma^2 \gamma p^* - \rho^* T^* = 0 \qquad (4.1.1/27)$$

$$\rho^* \, \vec{v}^* \, \mathrm{grad}^* T^* - (\gamma - 1) \, Ma^2 \, \vec{v}^* \, \mathrm{grad}^* p^* = 0 \qquad (4.1.1/28)$$

4.1.2 Asymptotische Strömungsfeldgleichungen

Zur Lösung des Gleichungssystems (4.1.1/25) - (4.1.1/28) wird ein Störansatz in folgender Form mit $\nu = 0,1,2\ldots$ verwendet:

$$p^* = \hat{p}_0 + Ma^2\hat{p}_1 + \ldots + Ma^{2\nu}\,\hat{p}_\nu \qquad \hat{p}_\nu = \hat{p}_\nu\,(x^*, y^*, z^*)$$

$$\rho^* = \hat{\rho}_0 + Ma^2\hat{\rho}_1 + \ldots + Ma^{2\nu}\,\hat{\rho}_\nu \qquad \hat{\rho}_\nu = \hat{\rho}_\nu\,(x^*, y^*, z^*)$$

$$T^* = \hat{T}_0 + Ma^2\hat{T}_1 + \ldots + Ma^{2\nu}\,\hat{T}_\nu \qquad \hat{T}_\nu = \hat{T}_\nu\,(x^*, y^*, z^*)$$

$$\vec{v}^* = \hat{\vec{v}}_0 + Ma^2\hat{\vec{v}}_1 + \ldots + Ma^{2\nu}\,\hat{\vec{v}}_\nu \qquad \hat{\vec{v}}_\nu = \hat{\vec{v}}_\nu\,(x^*, y^*, z^*) \qquad (4.1.2/1)$$

Einsetzen von (4.1.2/1) in (4.1.1/25) - (4.1.1/28) und Ordnen nach Potenzen von $Ma^{2\nu}$ ergibt:

$$\hat{\vec{v}}_0\,\mathrm{grad}^*\,\hat{\rho}_0 + \hat{\rho}_0\,\mathrm{div}^*\,\hat{\vec{v}}_0 +$$

$$Ma^2\left(\hat{\vec{v}}_1\,\mathrm{grad}^*\,\hat{\rho}_0 + \hat{\vec{v}}_0\,\mathrm{grad}^*\,\hat{\rho}_1 + \hat{\rho}_0\,\mathrm{div}^*\,\hat{\vec{v}}_1 + \hat{\rho}_1\,\mathrm{div}^*\,\hat{\vec{v}}_0\right)$$

$$+ \mathcal{O}(Ma^4) + \ldots = 0 \qquad (4.1.2/2)$$

$$\hat{\rho}_0\,\hat{\vec{v}}_0\,\mathrm{grad}^*\,\hat{\vec{v}}_0 + \mathrm{grad}^*\,\hat{p}_0 +$$

$$Ma^2\left(\rho_0\left(\hat{\vec{v}}_0\cdot\mathrm{grad}^*\right)\hat{\vec{v}}_1 + \hat{\rho}_1\left(\hat{\vec{v}}_0\cdot\mathrm{grad}^*\right)\hat{\vec{v}}_0 + \hat{\rho}_0\left(\hat{\vec{v}}_1\cdot\mathrm{grad}^*\right)\hat{\vec{v}}_0\right.$$

$$\left. + \mathrm{grad}^*\,\hat{p}_1\right)$$

$$+ \mathcal{O}(Ma^4) + \ldots = 0 \qquad (4.1.2/3)$$

$$1 - \hat{\rho}_0\,\hat{T}_0 + Ma^2\cdot\left(\gamma\,\hat{p}_0 - \left(\hat{\rho}_0\,\hat{T}_1 + \hat{\rho}_1\,\hat{T}_0\right)\right) + \mathcal{O}\left(Ma^4\right)$$

$$+ \ldots = 0 \qquad (4.1.2/4)$$

$$\hat{\rho}_0\,\hat{\vec{v}}_0\,\mathrm{grad}^*\,\hat{T}_0 +$$

$$Ma^2\cdot\left(\hat{\rho}_0\,\hat{\vec{v}}_0\,\mathrm{grad}^*\,\hat{T}_1 + \hat{\rho}_1\,\hat{\vec{v}}_0\,\mathrm{grad}^*\,\hat{T}_0 + \hat{\rho}_0\,\hat{\vec{v}}_1\,\mathrm{grad}^*\,\hat{T}_0\right.$$

$$\left. - (\gamma - 1)\left(\hat{\vec{v}}_0\,\mathrm{grad}^*\,\hat{p}_0\right)\right)$$

$$+ \mathcal{O}\left(Ma^4\right) + \ldots = 0 \qquad (4.1.2/5)$$

Das Symbol $\mathcal{O}(Ma^4) + \ldots$ deutet an, daß alle Terme der Größenordnung Ma^4 und höherer Ordnung $\mathcal{O}(Ma^{2\nu})$ $\nu = 3,4 \ldots$ vernachlässigt wurden, d. h. die Genauigkeit des Gleichungssystems ist von $\mathcal{O}(Ma^2)$.

Die vorab vorgenommene Skalierung auf dimensionslose Größen der $\mathcal{O}(1)$ erlaubt nun die folgende Argumentation /vergl. auch NAYFEH (1973)/ :
Da das Gleichungssystem für alle Ma^2 erfüllt sein muß, müssen alle Glieder der Ordnung $Ma^{2\nu}$ getrennt verschwinden, d. h. in der Ordnung 1 müssen erfüllt sein:

$\mathcal{O}(1)$

$$\hat{\vec{v}}_0 \, \mathrm{grad}^* \, \hat{\rho}_0 + \hat{\rho}_0 \, \mathrm{div}^* \, \hat{\vec{v}}_0 = 0 \qquad (4.1.2/6)$$

$$\hat{\rho}_0 \left(\hat{\vec{v}}_0 \cdot \mathrm{grad}^* \right) \hat{\vec{v}}_0 + \mathrm{grad}^* \, \hat{p}_0 = 0 \qquad (4.1.2/7)$$

$$1 - \hat{\rho}_0 \, \hat{T}_0 = 0 \qquad (4.1.2/8)$$

$$\hat{\rho}_0 \, \hat{\vec{v}}_0 \, \mathrm{grad}^* \, \hat{T}_0 = 0 \qquad (4.1.2/9)$$

und nach Division durch Ma^2 in

$\mathcal{O}(Ma^2)$

$$\hat{\vec{v}}_1 \, \mathrm{grad}^* \, \hat{\rho}_0 + \hat{\vec{v}}_0 \, \mathrm{grad}^* \, \hat{\rho}_1 + \hat{\rho}_0 \, \mathrm{div}^* \, \hat{\vec{v}}_1 + \hat{\rho}_1 \, \mathrm{div}^* \, \hat{\vec{v}}_0 = 0 \qquad (4.1.2/10)$$

$$\rho_0 \left(\hat{\vec{v}}_0 \cdot \mathrm{grad}^* \right) \hat{\vec{v}}_1 + \hat{\rho}_1 \left(\hat{\vec{v}}_0 \cdot \mathrm{grad}^* \right) \hat{\vec{v}}_0 + \hat{\rho}_0 \left(\hat{\vec{v}}_1 \cdot \mathrm{grad}^* \right) \hat{\vec{v}}_0 + \mathrm{grad}^* \, \hat{p}_1 = 0 \qquad (4.1.2/11)$$

$$\gamma \, \hat{p}_0 - \left(\hat{\rho}_0 \, \hat{T}_1 + \hat{\rho}_1 \, \hat{T}_0 \right) = 0 \qquad (4.1.2/12)$$

$$\hat{\rho}_0 \, \hat{\vec{v}}_0 \, \mathrm{grad}^* \, \hat{T}_1 + \hat{\rho}_1 \, \hat{\vec{v}}_0 \, \mathrm{grad}^* \, \hat{T}_0 + \hat{\rho}_0 \, \hat{\vec{v}}_1 \, \mathrm{grad}^* \, \hat{T}_0 - \left(\gamma - 1 \right) \left(\hat{\vec{v}}_0 \, \mathrm{grad}^* \, \hat{p}_0 \right) = 0 \qquad (4.1.2/13)$$

Es ergibt sich auch eine Hierarchie, in der die Gleichungssysteme gelöst werden müssen :

Das Gleichungssystem der $\mathcal{O}(1)$ wird von dem der $\mathcal{O}(Ma^2)$ nur unwesentlich beeinflußt, da alle Koeffizienten im System (4.1.2/1o) - (4.1.2/13) mit dem sehr kleinen Faktor Ma^2 multipliziert werden. Wird das Gleichungssystem der $\mathcal{O}(1)$ getrennt gelöst, so liegt dessen Fehler daher in der $\mathcal{O}(Ma^2)$.
Umgekehrt werden die Gleichungen der $\mathcal{O}(Ma^2)$ wesentlich von den Lösungen der $\mathcal{O}(1)$ beeinflußt, weil diese als nunmehr bestimmte Funktionen der gleichen Größenordnung auftreten. Es muß daher zunächst die Lösung von $\mathcal{O}(1)$ gefunden werden. Die Lösungen $\hat{p}_0\ (x^*, y^*, z^*)$, $\hat{\rho}_0\ (x^*, y^*, z^*)$, $\hat{T}_0\ (x^*, y^*, z^*)$ und $\hat{\vec{v}}_0\ (x^*, y^*, z^*)$ gehen dann als bestimmte Koeffizienten in das Gleichungssystem der $\mathcal{O}(Ma^2)$ ein. In dieser Ordnung können nun die Lösungen $\hat{p}_1$, $\hat{\rho}_1$, $\hat{T}_1$ und $\hat{\vec{v}}_1$ bestimmt werden.

Die Argumentation, daß das Gleichungssystem der niedrigeren Ordnung nur unwesentlich von dem der höheren Ordnung beeinflußt wird, daß das der niedrigeren Ordnung das der höheren dagegen wesentlich beeinflußt, gilt für jede Ordnung. Es ist daher gerechtfertigt, die Gleichungen ab einer gewissen Ordnung zu vernachlässigen, wie hier ab $\mathcal{O}(Ma^4)$.

Durch dieses Vorgehen konnte erreicht werden, daß das ursprüngliche partielle Differentialgleichungssystem in eine Folge von sukzessive zu lösenden Differentialgleichungssystemen überführt wurde. Einen Vorteil erzielt man jedoch nur, wenn die neuen Gleichungssysteme leichter lösbar sind als das alte. Dann ist es möglich, den numerischen Aufwand bei der Lösung der gewünschten Genauigkeit anzupassen. Die Genauigkeit hängt wegen des asymptotischen Charakters der Gleichungssysteme stark von der Größe des Störparameters Ma^2 ab. Begnügt man sich mit einer Lösung, die einen Fehler der $\mathcal{O}(Ma^2)$ aufweist, so genügt es, das Gleichungssystem der $\mathcal{O}(1)$ zu lösen. Ist diese Genauigkeit nicht ausreichend, so muß zusätzlich das Gleichungssystem der $\mathcal{O}(Ma^2)$ gelöst werden. Für den hier interessierenden Bereich des Störparameters Ma^2 bis $\approx 3 \times 10^{-3}$ sollte eine Lösung der $\mathcal{O}(1)$ ausreichen.

Ist nun das Gleichungssystem der $\mathcal{O}(1)$ leichter lösbar ?

Welche Eigenschaften des Strömungsfeldes werden dadurch beschrieben ?

4.1.3 Die Eigenschaften der asymptotischen Strömungsfeldgleichungen

Es sollen nun die Eigenschaften der Gleichungen (4.1.2/6) - (4.1.2/9) untersucht werden. Entscheidend ist hier die Gleichung (4.1.2/8). Vergleicht man sie mit der Ausgangsgleichung (4.1.1/27), so zeigt sich, daß nur noch Temperaturverlauf und Dichteverlauf gekoppelt sind. Druckänderungen haben also keine Dichteänderungen zur Folge. In $\mathcal{O}(1)$ verhält sich die Strömung inkompressibel. Die Kompressibilität der Luft kommt erst in der $\mathcal{O}(Ma^2)$ zur Geltung.

Aus Gleichung (4.1.2/8) und (4.1.2/9) folgt:

$$\hat{\rho}_0 \, \hat{\vec{v}}_0 \, \text{grad}^* \, \hat{T}_0 = \hat{\rho}_0 \, \hat{\vec{v}}_0 \, \text{grad}^* \, \frac{1}{\hat{\rho}_0} = 0$$

oder

$$- \frac{1}{\hat{\rho}_0} \, \hat{\vec{v}}_0 \, \text{grad}^* \, \hat{\rho}_0 = 0 \qquad (4.1.3/1)$$

Da nun $\hat{\rho}_0$ immer $\neq 0, \infty$ folgt:

$$\hat{\vec{v}}_0 \, \text{grad}^* \, \hat{\rho}_0 = 0 \qquad (4.1.3/2)$$

Aus der Kontinuitätsgleichung (4.1.2/6) und (4.1.3/7) ergibt sich:

$$\text{div}^* \, \hat{\vec{v}}_0 = 0$$

Man erhält dann in $\mathcal{O}(1)$ das folgende einfache Gleichungssystem zur Bestimmung der Lösungen $\hat{\rho}_0 \, (x^*, y^*, z^*)$, $\hat{p}_0 \, (x^*, y^*, z^*)$, $\hat{T}_0 \, (x^*, y^*, z^*)$ und $\hat{\vec{v}}_0 \, (x^*, y^*, z^*)$

$$\text{div}^* \, \hat{\vec{v}}_0 = 0 \qquad (4.1.3/3)$$

$$\hat{\vec{v}}_0 \, \text{grad}^* \, \hat{\rho}_0 = 0 \qquad (4.1.3/4)$$

$$\hat{T}_0 = 1/\hat{\rho}_0 \qquad (4.1.3/5)$$

$$\hat{\rho}_0 \left(\hat{\vec{v}}_0 \cdot \text{grad}^* \right) \hat{\vec{v}}_0 + \text{grad}^* \, \hat{p}_0 = 0 \qquad (4.1.3/6)$$

Dabei bietet sich der folgende Lösungsweg an:
Zunächst wird die Gleichung (4.1.3/3)gelöst, da Randbedingungen

für $\hat{\vec{v}}_0$ vorgeschrieben sind. Hierfür stehen Standardverfahren zur Verfügung. - Später wird an einem Beispiel ein Verfahren angegeben, das sich für die Berechnung auf einem Minicomputer eignet und in Hinblick auf die Verwendung der Strömungsfeldkoeffizienten in den akustischen Gleichungen genügend flexibel ist. - Die Lösung der Gleichungen (4.1.3/4) für $\hat{\rho}_0$ und damit auch die Lösung von (4.4.3/5) für $\hat{T}_0$ ist dann mit Hilfe des Charakteristikenverfahrens möglich /COURANT & HILBERT (1968)/.
Mit $\hat{\vec{v}}_0 = \left(\hat{u}_0\ (x^*, y^*, z^*), \hat{v}_0\ (x^*, y^*, z^*), \hat{w}_0\ (x^*, y^*, z^*)\right)$
erhält man aus (4.1.3/4) :

$$\hat{u}_0 \frac{\partial \hat{\rho}_0}{\partial x^*} + \hat{v}_0 \frac{\partial \hat{\rho}_0}{\partial y^*} + \hat{w}_0 \frac{\partial \hat{\rho}_0}{\partial z^*} = 0 \qquad (4.1.3/7)$$

Es werden nun die unabhängigen Variablen

$$p_x = \frac{\partial \hat{\rho}_0}{\partial x^*}\ ,\quad p_y = \frac{\partial \hat{\rho}_0}{\partial y^*}\ ,\ p_z = \frac{\partial \hat{\rho}_0}{\partial z^*}$$

eingeführt, so daß sich aus (4.1.3/7)

$$H = \hat{u}_0\, p_x + \hat{v}_0\, p_y + \hat{w}_0\, p_z \qquad (4.1.3/8)$$

ergibt. Die Charakteristiken sind dann Raumkurven $F(x^*, y^*, z^*) = 0$ die sich als Lösungen aus dem folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungssystem in der unabhängigen Variablen t^* ergeben:

$$\frac{d\,x^*}{d\,t^*} = \frac{\partial\, H}{\partial\, p_x} = \hat{u}_0(x^*, y^*, z^*) \qquad (4.1.3/9)$$

$$\frac{d\,y^*}{d\,t^*} = \frac{\partial\, H}{\partial\, p_y} = \hat{v}_0\ (x^*, y^*, z^*) \qquad (4.1.3/10)$$

$$\frac{d\,z^*}{d\,t^*} = \frac{\partial\, H}{\partial\, p_z} = \hat{w}_0\ (x^*, y^*, z^*) \qquad (4.1.3/11)$$

Für die Lösung dieses Gleichungssystems stehen viele numerische Verfahren zur Verfügung. An einem konkreten Beispiel wird noch auf ein Prädiktor-Korrektor-Verfahren eingegangen.

$\hat{\rho}_0$ erhält man dann aus:

$$\frac{d\,\hat{\rho}_0}{d\,t^*} = \hat{u}_0\, p_x + \hat{v}_0\, p_y + \hat{w}_0\, p_z = 0$$

d. h. entlang den durch (4.1.3/9) - (4.1.3/11) gegebenen Raumkurven bleibt $\hat{\rho}_0$ konstant und wegen Gleichung (4.1.3/5) auch $\hat{T}_0$. Die Raumkurven sind in diesem Falle die Stromlinien, die Bahnkurven der Gasteilchen. Die Strömung führt das Temperatur- und Dichtefeld in dieser Ordnung also konvektiv mit. Sollen außer der Strömungsgeschwindigkeit auch Temperatureinflüsse untersucht werden, so genügt es, die Stromlinie, die bei Strömungsfeldberechnungen ohnehin meistens dargestellt werden, bis zum geschichteten Bereich zurückzuverfolgen und den dort vorgegebenen Temperaturwert einzusetzen.

Der Wert von $\hat{p}_0$ ergibt sich nach den bei der Skalierung von (3.1/4) gemachten Überlegungen aus Gleichung (4.1.3/6) zu

$$\hat{p}_0 = -\frac{\hat{\rho}_0}{2}\,|\hat{\vec{v}}_0|^2 \qquad (4.1.3/12)$$

aus den bereits ermittelten Werten für ρ_0 und $\hat{\vec{v}}_0$. Die Integrationskonstante ist in diesem Falle wegen der Skalierung gleich null.

Welche Vereinfachungen ergeben sich nun gegenüber dem von BLOKHINTZEV unterstellten strömungsmechanischen Gleichungssystem ?

4.1.4 Vergleich der asymptotischen Gleichungen mit den ursprünglichen Gleichungen

Vergleicht man die asymptotischen Gleichungen (4.1.3/3) - (4.1.3/6) mit denen von BLOKHINTZEV (Gleichungen (3.3/8) - (3.3.11)), so ergeben sich die folgenden Vorteile:

1. Statt eines nichtlinearen partiellen Differentialgleichungssystems muß zunächst die einfache lineare partielle Differentialgleichung (4.1.3/3) gelöst werden. Daraus erhält man $\hat{\hat{v}}_0$. Mit Hilfe von $\hat{\hat{v}}_0$ ergibt sich die Lösung für $\hat{\rho}_0$ durch Anwendung des Charakteristikenverfahrens aus dem gewöhnlichen Differentialgleichungssystem 1. Ordnung mit variablen Koeffizienten (4.1.3/9) - (4.1.3/11). $\hat{T}_0$ ergibt sich dann aus der einfachen Gleichung (4.1.3/5) und $\hat{p}_0$ aus (4.1.3/12).

2. Für die numerische Berechnung des Strömungsfeldes ist es ausreichend, lediglich $\hat{\hat{v}}_0$ (x*, y*, z*) und die ursprüngliche Temperatur- oder Dichteschichtung zu speichern. Alle anderen ortsabhängigen Koeffizienten können aus diesen Daten berechnet werden.

3. Die Gleichungen (4.1.3/3) - (4.1.3/6) sind sehr flexibel für die weitere Anwendung in den akustischen Gleichungen. Es können sowohl - um Rechenzeit zu sparen - einzelne oder auch alle Strömungsfeldkoeffizienten im ganzen interessierenden Bereich vorab berechnet und gespeichert werden. Die Gleichungen erlauben es aber auch, bei begrenztem Speicherraum, die Koeffizienten für $\hat{p}_0$, $\hat{\rho}_0$, $\hat{T}_0$ jeweils an den interessierenden Orten aus $\hat{\hat{v}}_0$ zu berechnen. Die Methode kann also sehr flexibel an die numerischen Gegebenheiten angepaßt werden.

In Kauf genommen wird ein Fehler in den Lösungen in der Größenordnung Ma^2, also etwa $3^0/_{00}$ für die in der Atmosphäre häufig vorkommenden Strömungsgeschwindigkeiten bis 2o m/s. Dieser Fehler liegt selbst bei Windkanalmessungen unterhalb der Meßgenauigkeit. Soll die Methode auf höhere Strömungsgeschwindigkeiten angewandt werden, so können zur Erhöhung der Genauigkeit zusätzlich die Gleichungen der $\mathcal{O}(Ma^2)$ gelöst werden. Die Vorteile der Störungsrechnung sind hier nicht so groß, jedoch kann auch in dieser Ordnung

die Lösung eines nichtlinearen partiellen Differentialgleichungssystems vermieden werden.

4.2 Die akustischen Gleichungen im inhomogenen Strömungsgeschwindigkeitsfeld

Bevor gezeigt wird, wie sich mit einer singulären Störungsrechnung Gleichungen für die akustische Wellenausbreitung in einer inkompressiblen Strömung gewinnen lassen, soll auf einige Implikationen eingegangen werden, die der Herleitung von akustischen Gleichungen analog zu BLOKHINTZEV's Vorgehen zugrunde liegen.

4.2.1 Zur Trennung von Akustik und Strömungsmechanik

Wie bereits in Kapitel 3.1 angedeutet, ist eine generelle Trennung von Akustik und Strömungsmechanik nicht möglich, weil beide Disziplinen von denselben Grundgleichungen ausgehen und dieselben Größen benutzen.

Bei den Brechungsmodellen ist diese Trennung wegen der Annahme eines zeitinvarianten Strömungfeldes erheblich leichter. Weil die Akustik nur an Wechseldrücken interessiert ist,und ein zeitinvariantes Strömungsfeld a priori keine Wechseldrücke hervorrufen kann, müssen alle in diesem Feld gemessenen oder berechneten Wechseldrücke von einer externen akustischen Quelle hervorgerufen sein. Das Strömungsfeld kann unter diesen Bedingungen lediglich lokale Veränderungen des von der Schallquelle ausgehenden Wechseldruckes bewirken. Durch die den Brechungsmodellen zugrunde liegende Annahme eines zeitinvarianten Strömungsfeldes ist eine Schallerzeugung also ausgeschlossen.

Ist nun die Annahme des Strömungsfeldes als zeitinvariant allein ausreichend, um auch eine eindeutige Trennung in akustische und strömungsmechanische Gleichungen in der von BLOKHINTZEV vorgeschlagenen Art zu ermöglichen ? Um eine Antwort auf diese Frage zu finden, soll BLOKHINTZEV's Vorgehen noch einmal dargestellt werden.

Er betrachtet zunächst ein von der Akustik ungestörtes zeitinvariantes Strömungsfeld, dessen örtliche Druck-, Dichte-, Temperatur- und Strömungsgeschwindigkeitsverteilung den Gleichungen (3.3/8) - (3.3/11) gehorchen müssen. Im zweiten Schritt gehen diese Strömungsfeldgrößen unverändert als ortsabhängige Koeffizienten

in die akustischen Gleichungen ein. Impliziert wird hierbei, daß die Strömungsfeldgrößen nicht oder nur unwesentlich von der akustischen Welle beeinflußt werden. Dies ist die Voraussetzung für die getrennte Lösung von Strömungsfeldgleichungen einerseits und die unveränderte Übernahme der Lösungen als Koeffizienten in die akustischen Gleichungssysteme andererseits.

Ist es nun möglich, daß die Strömungsfeldkoeffizienten überhaupt nicht von der akustischen Welle beeinflußt werden ? Die Antwort lautet: nein. Lediglich wenn es sich bei den durch (3.3/1) - (3.3/4) gegebenen Grundgleichungen um lineare Gleichungen handeln würde, könnte ein Einfluß der akustischen Welle auf die Strömungsfeldgrößen gänzlich ausgeschlossen werden. Bei linearen Gleichungen zeigt eine Fourier-Transformation bezüglich der Zeit, daß eine wechselseitige Beeinflussung von Signalen unterschiedlicher Frequenz nicht auftritt. Hätten die strömungsmechanisch-akustischen Grundgleichungen linearen Charakter, so wäre keine Beeinflussung des zeitinvarianten Strömungsfeldes (der Frequenz 0) durch eine akustische Welle (der Frequenz ω) möglich. Umgekehrt gäbe es dann allerdings auch keinen Strömungsfeldeinfluß auf die akustische Wellenausbreitung. Da diese Grundgleichungen nichtlinearen Charakter haben, kann also eine gegenseitige Beeinflussung von akustischen Gleichungen und Strömungsfeldgleichungen grundsätzlich nicht ausgeschlossen werden. Deshalb ist es auch strenggenommen nicht möglich, eine Trennung von akustischen und strömungsmechanischen Gleichungen in der von BLOKHINTZEV vorgeschlagenen Art vorzunehmen.

Es gibt jedoch Fälle, in denen eine solche Trennung sinnvoll ist: Wenn die akustischen Größen von den Strömungsfeldgrößen wesentlich beeinflußt werden und die akustischen Größen die Strömungsfeldgrößen nur unwesentlich beeinflussen, ist es möglich, den durch die Rückwirkung der Akustik auf die Strömungsmechanik hervorgerufenen kleinen Fehler zu vernachlässigen und die Gleichungen zu trennen. Die Strömungsfeldgleichungen beeinhalten dann einen kleinen Restfehler. Ist dieser klein genug, so ist BLOKHINTZEV's Vorgehen sinnvoll. Nicht sinnvoll hingegen ist es, die strömungsmechanischen Grundgleichungen mit einer Genauigkeit zu lösen, die in der Größenordnung des Restfehlers liegt, der durch die Rückwirkung der akustischen Welle auf das Strömungsfeld gegeben ist.

Im folgenden Kapitel wird gezeigt, daß die den Störungsrechnungsmethoden eigene Systematik hier zu sinnvolleren Ergebnissen führt. Es wird sich herausstellen, daß BLOKHINTZEV's akustische und strömungsmechanische Gleichungen, die in der Folge von vielen Autoren /u.a. GOLDSTEIN(1976), MÖHRING(1971), MORFEY(1971)/ und mit der weiteren Vereinfachung des geschichteten Mediums von THOMPSON(1972), (1974a), (1974b) gelöst wurden, für die Eigenschaften, die das Strömungsfeld in der Oberflächenschicht der Atmosphäre aufweist, einer Revision bedürfen.

Die neuen asymptotischen Gleichungen vermeiden den Fehler, Strömungsfeldkoeffizienten in den akustischen Gleichungen zu berücksichtigen, die in der Größenordnung der Rückwirkung der akustischen Größen auf die Strömungsfeldgrößen liegen. Ferner erlauben sie, die Größenordnung der Rückwirkung und damit den Gültigkeitsbereich der Gleichungen abzuschätzen. Es wird deutlich, unter welchen Bedingungen eine wechselseitige Beeinflussung von akustischen und strömungsmechanischen Größen so stark wird, daß es sinnlos ist, beide Phänomene getrennt zu betrachten.

4.2.2 Asymptotische akustische und strömungsmechanische Gleichungen

Da die Strömungsfeldgleichungen der $\mathcal{O}(1)$ eine inkompressible Strömung beschreiben, durch die akustische Welle dagegen isentropische Druck-, Dichte-, Temperatur- und Strömungsgeschwindigkeitsänderungen hervorgerufen werden, wird die spezielle Skalierung dieser Änderungen im folgenden als Kriterium verwendet, um die akustischen Größen von den Strömungsfeldgrößen zu trennen. Es wird gezeigt, daß die Beschreibung der akustischen Wellenausbreitung im inkompressiblen Medium mit Hilfe einer singulären Störungsrechnung erfolgen kann.

Zur Durchführung der Störungsrechnung ist es notwendig, die durch die akustische Welle hervorgerufenen Störungen des Druckes, der Dichte, der Temperatur und der Strömungsgeschwindigkeit an einen gemeinsamen Störparameter zu koppeln. Für ein Verschwinden der akustischen Störung ($\varepsilon \to 0$) müssen dann alle akustischen Größen von gleicher Ordnung ε verschwinden. Aus Überlegungen von MORSE & INGARD (1968) geht hervor, daß die linearen akustischen Größen ρ', p', T' und $\vec{v}'$ die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$\frac{|\vec{v}'|}{c_u} = \frac{\rho'}{\rho' + \rho_u} = \frac{p'}{\gamma\, p_u} = \frac{T'}{(\gamma - 1)\, T_u} \qquad (4.2.2/1)$$

wobei c_u die Schallgeschwindigkeit ρ_u, p_u und T_u die Zustandsgrößen des durch die Akustik nicht gestörten Mediums sind.

Für Schalldruckpegel von $\simeq$ 91 dB (bezogen auf $2 \cdot 10^{-5}$ Pa) beträgt $\frac{\rho'}{\rho' + \rho_u} \simeq 10^{-5}$, so daß

$$\frac{\rho'}{\rho' + \rho_u} = \frac{\rho'}{\rho_u} \cdot \left(1 - \mathcal{O}(10^{-5})\right) \simeq \frac{\rho'}{\rho_u}$$

gesetzt werden kann.
Mit $c_u = c_r$, $p_u = p_r$, $\rho_u = \rho_r$, $T_u = T_r$ ergeben sich dann die folgenden dimensionslosen akustischen Größen, die mit dem Index $\tilde{}$ bezeichnet werden.

$$\frac{\vec{v}'}{c_r} = \varepsilon \tilde{\vec{v}}_0$$

$$\frac{p'}{\gamma\, p_r} = \varepsilon \tilde{p}_0$$

$$\frac{\rho'}{\rho_r} = \varepsilon \tilde{\rho}_0$$

$$\frac{T'}{(\gamma - 1)\, T_r} = \varepsilon \tilde{T}_0$$

Wie gewünscht sind nun alle akustischen Größen für $\varepsilon \to 0$ dem gleichen Störparameter ε zugeordnet. Setzt man den interessierenden Schalldruckpegelbereich mit 31 ... 91 dB an, so liegt ε im Bereich 10^{-8} ... 10^{-5}. Alle ~ Größen sind von $\mathcal{O}(1)$ und von den strömungsmechanischen Skalen x*, y*, z* und t* abhängig.

Im nächsten Schritt werden $\tilde{p}_0$, $\tilde{\rho}_0$, $\tilde{\vec{v}}_0$ und $\tilde{T}_0$ auf die strömungsmechanischen Skalen umgerechnet. Für $\tilde{\rho}_0$ und T_0 ergeben sich hierbei keine Änderungen. Zu beachten ist aber, daß im strömungsmechanischen System die Geschwindigkeiten auf v_r und die Drücke auf $\rho_r v_r^2$ bezogen sind. Daraus folgt:

$$\frac{\vec{v}'}{v_r} = \frac{\vec{v}'}{c_r}\frac{c_r}{v_r} = \frac{\varepsilon}{Ma}\tilde{\vec{v}}_0\,(x^*, y^*, z^*, t^*)$$

und

$$\frac{p'}{\rho_r v_r^2} = \frac{p'}{\gamma\, p_r}\frac{\gamma\, p_r}{\rho_r v_r^2} = \frac{\varepsilon}{Ma^2}\tilde{p}_0\,(x^*, y^*, z^*, t^*)$$

Nun kann die Überlagerung des akustischen und strömungsmechanischen Feldes im strömungsmechanischen Bezugssystem folgendermaßen geschrieben werden:

$$\vec{v}^*\,(x^*, y^*, z^*, t^*) = \hat{\vec{v}}_0\,(x^*, y^*, z^*) + Ma^2\,\hat{\vec{v}}_1\,(x^*, y^*, z^*)$$

$$+ \mathcal{O}(Ma^4) \ldots + \frac{\varepsilon}{Ma}\tilde{\vec{v}}_0\,(x^*, y^*, z^*, t^*) \qquad (4.2.2/2)$$

$$p^*(x^*, y^*, z^*, t^*) = \hat{p}_0(x^*, y^*, z^*) + Ma^2\,\hat{p}_1(x^*, y^*, z^*) + \mathcal{O}(Ma^4) \ldots + \frac{\varepsilon}{Ma^2}\,\tilde{p}_0(x^*, y^*, z^*, t^*) \qquad (4.2.2/3)$$

$$\rho^*(x^*, y^*, z^*, t^*) = \hat{\rho}_0(x^*, y^*, z^*) + Ma^2\,\hat{\rho}_1(x^*, y^*, z^*) + \mathcal{O}(Ma^4) \ldots + \varepsilon\,\tilde{\rho}_0(x^*, y^*, z^*, t^*) \qquad (4.2.2/4)$$

$$T^*(x^*, y^*, z^*, t^*) = \hat{T}_0(x^*, y^*, z^*) + Ma^2\,\hat{T}_1(x^*, y^*, z^*) + \mathcal{O}(Ma^4) \ldots + \varepsilon\,\tilde{T}_0(x^*, y^*, z^*, t^*) \qquad (4.2.2/5)$$

Zu beachten ist hierbei, daß die akustischen Größen nur bis zur $\mathcal{O}(1)$ des strömungsmechanischen Grundzustandes richtig bezogen sind. Für einen richtigen Bezug bis $\mathcal{O}(Ma^2)$ müßte statt auf c_r auf $c_r \cdot \left(1 + Ma^2\,(\hat{\rho}_0 - \hat{\rho}_1)\right)$ bezogen werden. Im weiteren Verlauf der Herleitung wird gezeigt, daß eine Berücksichtigung des Grundzustandes bis $\mathcal{O}(Ma^2)$ nicht sinnvoll ist. Hier soll jedoch zur Verdeutlichung der späteren Argumentation die $\mathcal{O}(Ma^2)$ im strömungsmechanischen Zustand mitberücksichtigt werden.

Die Gleichungen (4.2.2/2) - (4.2.2/5) werden nun in die Gleichungen (4.1.1/21) - (4.1.1/24) eingesetzt:

Kontinuitätsgleichung

$$\varepsilon\,\frac{\partial\,\tilde{\rho}_\rho}{\partial\,t^*} + (\hat{\vec{v}}_0 + Ma^2\,\hat{\vec{v}}_1 + \ldots + \frac{\varepsilon}{Ma}\,\tilde{\vec{v}}_0)\ \mathrm{grad}^*\,(\hat{\rho}_0 + Ma^2\,\hat{\rho}_1 + \ldots \varepsilon\,\tilde{\rho}_0) + (\hat{\rho}_0 + Ma^2\,\hat{\rho}_1 + \ldots + \varepsilon\,\tilde{\rho}_\rho)\ \mathrm{div}^*\,(\hat{\vec{v}}_0 + Ma^2\,\hat{\vec{v}}_1 + \ldots + \frac{\varepsilon}{Ma}\,\tilde{\vec{v}}_0) = 0 \qquad (4.2.2/6)$$

Bewegungsgleichung

$$(\hat{\rho}_0 + Ma^2\,\hat{\rho}_1 + \ldots + \varepsilon\,\tilde{\rho}_0)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t^*}\left(\frac{\varepsilon}{Ma}\,\vec{\tilde{v}}_0\right) + \left(\hat{\vec{v}}_0 + Ma^2\,\hat{\vec{v}}_1 + \ldots + \frac{\varepsilon}{Ma}\,\vec{\tilde{v}}_0\right)\cdot \mathrm{grad}^*\left(\hat{\vec{v}}_0 + Ma^2\,\hat{\vec{v}}_1 + \ldots + \frac{\varepsilon}{Ma}\,\vec{\tilde{v}}_0\right)\right)$$
$$+ \mathrm{grad}^*\left(\hat{p}_0 + Ma^2\,\hat{p}_1 + \ldots + \frac{\varepsilon}{Ma^2}\,\tilde{p}_0\right) = 0 \qquad (4.2.2/7)$$

Zustandsgleichung

$$1 + \gamma\,Ma^2\left(\hat{p}_0 + Ma^2\,\hat{p}_1 + \ldots + \frac{\varepsilon}{Ma^2}\,\tilde{p}_0\right) - (\hat{\rho}_0 + Ma^2\,\hat{\rho}_1 + \ldots + \varepsilon\,\tilde{\rho}_0)\cdot\left(\hat{T}_0 + Ma^2\,\hat{T}_1 + \ldots + \varepsilon(\gamma - 1)\,\tilde{T}_0\right)$$
$$= 0 \qquad (4.2.2/8)$$

Energiegleichung

$$(\hat{\rho}_0 + Ma^2\,\hat{\rho}_1 + \ldots + \varepsilon\,\tilde{\rho}_0)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t^*}\left(\varepsilon\,(\gamma - 1)\,\tilde{T}_0\right) + \left(\hat{\vec{v}}_0 + Ma^2\,\hat{\vec{v}}_1 + \ldots + \frac{\varepsilon}{Ma}\,\vec{\tilde{v}}_0\right)\mathrm{grad}^*\left(\hat{T}_0 + Ma^2\,\hat{T}_1 + \ldots + \varepsilon\,(\gamma-1)\tilde{T}_0\right)\right)$$
$$- (\gamma - 1)\,Ma^2\left(\frac{\partial}{\partial t^*}\left(\frac{\varepsilon}{Ma^2}\,\tilde{p}_0\right) + (\hat{\vec{v}}_0 + Ma^2\,\hat{\vec{v}}_1 + \ldots + \frac{\varepsilon}{Ma}\,\hat{\vec{v}}_0)\,\mathrm{grad}^*(\hat{p}_0 + Ma^2\,\hat{p}_1 + \ldots + \frac{\varepsilon}{Ma^2}\,\tilde{p}_0)\right)$$
$$= 0 \qquad (4.2.2/9)$$

Dieses Gleichungssystem wird geordnet nach
$\mathcal{O}(1)$, $\mathcal{O}(Ma^2)$, $\mathcal{O}(Ma^4)$; $\mathcal{O}(\varepsilon)$, $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$:

Kontinuitätsgleichung

$$\hat{\vec{v}}_0\,\mathrm{grad}^*\,\hat{\rho}_0 + \hat{\rho}_0\,\mathrm{div}^*\,\hat{\vec{v}}_0 +$$
$$Ma^2\,(\hat{\vec{v}}_1\,\mathrm{grad}^*\,\hat{\rho}_0 + \hat{\vec{v}}_0\,\mathrm{grad}^*\,\hat{\rho}_1 + \hat{\rho}_0\,\mathrm{div}^*\,\hat{\vec{v}}_1 + \hat{\rho}_1\,\mathrm{div}^*\,\hat{\vec{v}}_1)$$
$$+ Ma^4\,(\hat{\vec{v}}_1\,\mathrm{grad}^*\,\hat{\rho}_1 + \hat{\rho}_1\,\mathrm{div}^*\,\hat{\vec{v}}_1) +$$
$$\varepsilon\cdot\left(\frac{\partial\,\tilde{\rho}_0}{\partial\,t^*} + \frac{\vec{\tilde{v}}_0}{Ma}\,\mathrm{grad}^*\,(\hat{\rho}_0 + Ma^2\,\hat{\rho}_1) + (\hat{\vec{v}}_0 + Ma^2\,\hat{\vec{v}}_1)\,\mathrm{grad}^*\,\tilde{\rho}_0 +\right.$$

$$+ \frac{\hat{\rho}_0 + Ma^2\,\hat{\rho}_1}{Ma}\,\mathrm{div}^*\,\tilde{\vec{v}}_0 + \tilde{\rho}_0\,\mathrm{div}^*\,(\hat{\vec{v}}_0 + Ma^2\,\hat{\vec{v}}_1)$$

$$+ \varepsilon^2 \cdot \left(\frac{\tilde{\vec{v}}_0}{Ma}\,\mathrm{grad}^*\,\tilde{\rho}_0 + \tilde{\rho}_0\,\mathrm{div}^*\,\frac{\tilde{\vec{v}}_0}{Ma} \right) = 0 \qquad (4.2.2/10)$$

Bewegungsgleichung

$$\hat{\rho}_0\,\hat{\vec{v}}_0\,\mathrm{grad}^*\,\hat{\vec{v}}_0 + \mathrm{grad}^*\,\hat{p}_0 +$$

$$Ma^2 \left(\hat{\rho}_1 \left(\hat{\vec{v}}_0 \cdot \mathrm{grad}^*\right)\hat{\vec{v}}_0 + \hat{\rho}_0 \left(\hat{\vec{v}}_1 \cdot \mathrm{grad}^*\right)\hat{\vec{v}}_0 + \hat{\rho}_0 \left(\hat{\vec{v}}_0 \cdot \mathrm{grad}^*\right)\hat{\vec{v}}_1 + \mathrm{grad}^*\,\hat{p}_1 \right)$$

$$+ Ma^2 \left(\hat{\rho}_1 \left(\hat{\vec{v}}_1 \cdot \mathrm{grad}^*\right)\hat{\vec{v}}_0 + \hat{\rho}_0 \left(\hat{\vec{v}}_1 \cdot \mathrm{grad}^*\right)\hat{\vec{v}}_1 + \hat{\rho}_1 \left(\hat{\vec{v}}_0 \cdot \mathrm{grad}^*\right)\hat{\vec{v}}_1 \right)$$

$$+ Ma^6 \left(\hat{\rho}_1 \left(\hat{\vec{v}}_1 \cdot \mathrm{grad}^*\right)\hat{\vec{v}}_1 \right) +$$

$$\varepsilon \cdot \left((\hat{\rho}_0 + Ma^2\,\hat{\rho}_1) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial\, t^*} \left(\frac{\tilde{\vec{v}}_0}{Ma} \right) + \left(\frac{\hat{\vec{v}}_0 + Ma^2\,\hat{\vec{v}}_1}{Ma} \cdot \mathrm{grad}^* \right) \tilde{\vec{v}}_0 \right.\right.$$

$$\left. + \left(\frac{\tilde{\vec{v}}_0}{Ma} \cdot \mathrm{grad}^* \right)(\hat{\vec{v}}_0 + Ma^2\,\hat{\vec{v}}_1) \right)$$

$$+ \tilde{\rho}_0 \left((\hat{\vec{v}}_0 + Ma^2\,\hat{\vec{v}}_1) \cdot \mathrm{grad}^* \right)(\hat{\vec{v}}_0 + Ma^2\,\hat{\vec{v}}_1) + \mathrm{grad}^*\,\frac{\tilde{p}_0}{Ma^2} \Big) +$$

$$\varepsilon^2 \left(\frac{\tilde{\rho}_0}{Ma} \frac{\partial\,\tilde{\vec{v}}_0}{\partial\, t^*} + \frac{\hat{\rho}_0 + Ma^2\,\hat{\rho}_1}{Ma^2} \left(\tilde{\vec{v}}_0 \cdot \mathrm{grad}^*\right)\tilde{\vec{v}}_0 \right.$$

$$+ \left(\frac{\tilde{\rho}_0\,\tilde{\vec{v}}_0}{Ma}\,\mathrm{grad}^* \right)(\hat{\vec{v}}_0 + Ma^2\,\hat{\vec{v}}_1) + \tilde{\rho}_0 \left(\frac{(\hat{\vec{v}}_0 + Ma^2\,\hat{\vec{v}}_1)}{Ma} \cdot \mathrm{grad}^* \right)\tilde{\vec{v}}_0$$

$$\left. + \varepsilon^3 \cdot \left(\frac{\tilde{\rho}_0}{Ma^2} \left(\tilde{\vec{v}}_0 \cdot \mathrm{grad}^*\right)\tilde{\vec{v}}_0 \right) = 0 \right. \qquad (4.2.2/11)$$

Zustandsgleichung

$$1 - \hat{\rho}_0\,\hat{T}_0 + Ma^2\,(\gamma\,\hat{p}_0 - \hat{\rho}_0\,\hat{T}_1 - \hat{\rho}_1\,\hat{T}_0) + \gamma\,Ma^4\,(\hat{p}_1 - \hat{\rho}_1\,\hat{T}_1)$$

$$+ \varepsilon \cdot \left(\gamma\,\tilde{p}_0 - \tilde{\rho}_0\,(\hat{T}_0 + Ma^2\,\hat{T}_1) - (\gamma - 1)\,\tilde{T}_0\,(\hat{\rho}_0 + Ma^2\,\hat{\rho}_1) \right)$$

$$- \varepsilon^2\,(\gamma - 1)\,\tilde{\rho}_0\,\tilde{T}_0 = 0 \qquad (4.2.2/12)$$

Energiegleichung

$$
\begin{aligned}
&\hat{\rho}_0 \, \hat{\vec{v}}_0 \, \mathrm{grad}^* \, \hat{T}_0 + \\
&\mathrm{Ma}^2 \cdot \Big(\hat{\rho}_1 \, \hat{\vec{v}}_0 \, \mathrm{grad}^* \, \hat{T}_0 + \hat{\rho}_0 \, \hat{\vec{v}}_1 \, \mathrm{grad}^* \, \hat{T}_0 + \hat{\rho}_0 \, \hat{\vec{v}}_0 \, \mathrm{grad}^* \, \hat{T}_1 \\
&\quad - (\gamma - 1) \, \hat{\vec{v}}_0 \, \mathrm{grad}^* \, \hat{p}_0 \Big) \\
&+ \mathrm{Ma}^4 \cdot \Big(\hat{\rho}_1 \hat{\vec{v}}_1 \, \mathrm{grad}^* \, \hat{T}_0 + \hat{\rho}_0 \, \hat{\vec{v}}_1 \, \mathrm{grad}^* \, \hat{T}_1 + \hat{\rho}_1 \, \hat{\vec{v}}_0 \, \mathrm{grad}^* \, \hat{T}_1 \\
&\quad - (\gamma - 1) \, (\hat{\vec{v}}_1 \, \mathrm{grad}^* \, \hat{p}_0 + \hat{\vec{v}}_0 \, \mathrm{grad}^* \, \hat{p}_1) \Big) \\
&+ \mathrm{Ma}^6 \cdot \Big(\hat{\rho}_1 \, \hat{\vec{v}}_1 \, \mathrm{grad}^* \, \hat{T}_1 - (\gamma - 1) \, \hat{\vec{v}}_1 \, \mathrm{grad}^* \, \hat{p}_1 \Big) \\
&+ \varepsilon \cdot \Big((\hat{\rho}_0 + \mathrm{Ma}^2 \, \hat{\rho}_1) \cdot \Big((\gamma - 1) \, \frac{\partial \, \tilde{T}_0}{\partial \, t^*} + (\hat{\vec{v}}_0 + \mathrm{Ma}^2 \, \hat{\vec{v}}_1) \cdot \\
&\quad \mathrm{grad}^* \, \big((\gamma - 1) \, \tilde{T}_0 \big) + \frac{\tilde{\vec{v}}_0}{\mathrm{Ma}} \, \mathrm{grad}^* \, (\hat{T}_0 + \mathrm{Ma}^2 \, \hat{T}_1) \Big) \\
&+ \tilde{\rho}_0 \, (\hat{\vec{v}}_0 + \mathrm{Ma}^2 \, \hat{\vec{v}}_1) \, \mathrm{grad}^* \, (\hat{T}_0 + \mathrm{Ma}^2 \, \hat{T}_1) \\
&- (\gamma - 1) \cdot \Big(\frac{\partial \, \tilde{\rho}_0}{\partial \, t^*} + (\hat{\vec{v}}_0 + \mathrm{Ma}^2 \, \hat{\vec{v}}_1) \, \mathrm{grad}^* \, \tilde{p}_0 + \mathrm{Ma} \, \tilde{\vec{v}}_0 \cdot \\
&\quad \mathrm{grad}^* \, (\hat{p}_0 + \mathrm{Ma}^2 \, \hat{p}_1) \Big) \Big) \\
&+ \varepsilon^2 \cdot \Big(\tilde{\rho}_0 \, \frac{\partial}{\partial \, t^*} \big((\gamma - 1) \, \tilde{T}_0 \big) + \frac{1}{\mathrm{Ma}} \, (\hat{\rho}_0 + \mathrm{Ma}^2 \, \hat{\rho}_1) \cdot \\
&\quad \tilde{\vec{v}}_0 \, \mathrm{grad}^* \, \big((\gamma - 1) \, \tilde{T}_0 \big) + \\
&\quad \tilde{\rho}_0 \cdot \Big(\hat{\vec{v}}_0 \, \mathrm{grad}^* \, \big((\gamma - 1) \, \tilde{T}_0 \big) + \frac{\tilde{\vec{v}}_0}{\mathrm{Ma}} \, \mathrm{grad}^* \, (\hat{T}_0 + \mathrm{Ma}^2 \, \hat{T}_1) \\
&\quad - \frac{\gamma - 1}{\mathrm{Ma}} \, \tilde{\vec{v}}_0 \, \mathrm{grad}^* \, \tilde{p}_0 \Big) + \\
&\varepsilon^3 \cdot \Big(\tilde{\rho}_0 \, \tilde{\vec{v}}_0 \, \mathrm{grad}^* \, \tilde{T}_0 \Big) = 0 \qquad (4.2.2/13)
\end{aligned}
$$

In dieser Form erlaubt das Gleichungssystem eine übersichtliche Zuordnung der einzelnen Terme zu den strömungsmechanischen bzw. akustischen Gleichungen. Die $\mathcal{O}(1)$ und $\mathcal{O}(\mathrm{Ma}^2)$ enthalten die strömungsmechanischen Gleichungen, die $\mathcal{O}(\varepsilon)$ die linearen akustischen Gleichungen. Die Terme der $\mathcal{O}(\mathrm{Ma}^4)$ und $\mathcal{O}(\mathrm{Ma}^6)$ sind inkonsistent, weil der Ansatz (4.2.2/1) bzw. (4.2.2/2) - (4.1.2/5) für das Strömungsfeld

nur Anteile bis zur $\mathcal{O}(Ma^2)$ enthält. Das gleiche gilt für die nichtlinearen akustischen Anteile der $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ und $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$.

Es kann damit ein strömungsmechanisch-akustisches Gleichungssystem in asymptotischer Darstellung für $Ma \to 0$ und $\varepsilon \to 0$ angegeben werden :

Kontinuitätsgleichung

$$\hat{\vec{v}}_0 \operatorname{grad}^* \hat{\rho}_0 + \hat{\rho}_0 \operatorname{div}^* \hat{\vec{v}}_0 +$$

$$Ma^2 \left(\hat{\vec{v}}_1 \operatorname{grad}^* \hat{\rho}_0 + \hat{\vec{v}}_0 \operatorname{grad}^* \hat{\rho}_1 + \hat{\rho}_0 \operatorname{div}^* \hat{\vec{v}}_1 + \hat{\rho}_1 \operatorname{div}^* \hat{\vec{v}}_1\right)$$

$$+ \mathcal{O}(Ma^4)$$

$$+ \varepsilon \cdot \left(\frac{\partial \tilde{\rho}_0}{\partial t^*} + \frac{\tilde{\vec{v}}_0}{Ma} \operatorname{grad}^* (\hat{\rho}_0 + Ma^2 \hat{\rho}_1) + (\hat{\vec{v}}_0 + Ma^2 \hat{\vec{v}}_1) \operatorname{grad}^* \tilde{\rho}_0 + \right.$$

$$\left. \frac{\hat{\rho}_0 + Ma^2 \hat{\rho}_1}{Ma} \operatorname{div}^* \tilde{\vec{v}}_0 + \tilde{\rho}_0 \operatorname{div}^* (\hat{\vec{v}}_0 + Ma^2 \hat{\vec{v}}_1) \right)$$

$$+ \mathcal{O}(\varepsilon^3) \quad = \quad 0 \qquad (4.2.2/14)$$

Bewegungsgleichung

$$\hat{\rho}_0 \left(\hat{\vec{v}}_0 \cdot \operatorname{grad}^*\right) \hat{\vec{v}}_0 + \operatorname{grad}^* \hat{p}_0 +$$

$$Ma^2 \left(\hat{\rho}_1 \left(\hat{\vec{v}}_0 \cdot \operatorname{grad}^*\right) \hat{\vec{v}}_0 + \hat{\rho}_0 \left(\hat{\vec{v}}_1 \cdot \operatorname{grad}^*\right) \hat{\vec{v}}_0 + \hat{\rho}_0 \left(\hat{\vec{v}}_1 \cdot \operatorname{grad}^*\right) \hat{\vec{v}}_1 + \operatorname{grad}^* \hat{p}_1 \right.$$

$$+ \mathcal{O}(Ma^4)$$

$$+ \varepsilon \cdot \left((\hat{\rho}_0 + Ma^2 \hat{\rho}_1) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t^*} \frac{\tilde{\vec{v}}_0}{Ma} + \left(\frac{\hat{\vec{v}}_0 + Ma^2 \hat{\vec{v}}_1}{Ma} \cdot \operatorname{grad}^* \right) \tilde{\vec{v}}_0 + \right. \right.$$

$$\left. \left(\frac{\tilde{\vec{v}}_0}{Ma} \cdot \operatorname{grad}^* \right) (\hat{\vec{v}}_0 + Ma^2 \hat{\vec{v}}_1) \right)$$

$$\left. + \tilde{\rho}_0 \left((\hat{\vec{v}}_0 + Ma^2 \hat{\vec{v}}_1) \cdot \operatorname{grad}^* \right) (\hat{\vec{v}}_0 + Ma^2 \hat{\vec{v}}_1) + \operatorname{grad}^* \frac{\tilde{p}_0}{Ma^2} \right)$$

$$+ \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad = \quad 0 \qquad (4.2.2/15)$$

Zustandsgleichung

$$1 - \hat{\rho}_0 \hat{T}_0 + Ma^2 (\gamma \hat{p}_0 - \hat{\rho}_0 \hat{T}_1 - \hat{\rho}_1 \hat{T}_0) + \mathcal{O}(Ma^4)$$
$$+ \varepsilon \cdot \left(\gamma \tilde{p}_0 - \tilde{\rho}_0 (\hat{T}_0 + Ma^2 \hat{T}_1) - (\gamma - 1) \tilde{T}_0 (\hat{\rho}_0 + Ma^2 \hat{\rho}_1)\right)$$
$$+ \mathcal{O}(\varepsilon^2) = 0 \qquad (4.2.2/16)$$

Energiegleichung

$$\hat{\rho}_0 \hat{\vec{v}}_0 \operatorname{grad}^* \hat{T}_0 +$$
$$Ma^2 \cdot \left(\hat{\rho}_1 \hat{\vec{v}}_0 \operatorname{grad}^* \hat{T}_0 + \hat{\rho}_0 \hat{\vec{v}}_1 \operatorname{grad}^* \hat{T}_0 + \hat{\rho}_0 \hat{\vec{v}}_0 \operatorname{grad}^* \hat{T}_1 \right.$$
$$\left. - (\gamma - 1) \hat{\vec{v}}_0 \operatorname{grad}^* \hat{p}_0\right)$$
$$+ \mathcal{O}(Ma^4) +$$
$$\varepsilon \cdot \left((\hat{\rho}_0 + Ma^2 \hat{\rho}_1) \cdot \left((\gamma - 1) \frac{\partial \tilde{T}_0}{\partial t^*} + (\hat{\vec{v}}_0 + Ma^2 \hat{\vec{v}}_1) \cdot \right.\right.$$
$$\left. \operatorname{grad}^* \left((\gamma - 1) \tilde{T}_0\right) + \frac{\tilde{\vec{v}}_0}{Ma} \operatorname{grad}^* (\hat{T}_0 + Ma^2 \hat{T}_1)\right)$$
$$+ \tilde{\rho}_0 (\hat{\vec{v}}_0 + Ma^2 \hat{\vec{v}}_1) \operatorname{grad}^* (\hat{T}_0 + Ma^2 \hat{T}_1)$$
$$- (\gamma - 1) \cdot \left(\frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial t^*} + (\hat{\vec{v}}_0 + Ma^2 \hat{\vec{v}}_1) \operatorname{grad}^* \tilde{p}_0 + \right.$$
$$\left.\left. Ma \tilde{\vec{v}}_0 \operatorname{grad}^* (\hat{p}_0 + Ma^2 \hat{p}_1)\right)\right)$$
$$+ \mathcal{O}(\varepsilon^2) = 0 \qquad (4.2.2/17)$$

Die Gleichungen enthalten in $\mathcal{O}(1)$ und $\mathcal{O}(Ma^2)$ die mit dem Index $\hat{}$ gekennzeichneten Strömungsfeldgrößen. Sie beschreiben den Grundzustand, um den die akustische Auslenkung erfolgt. Ihre Eigenschaften und Lösungsmöglichkeiten wurden bereits im Kapitel 4.1 diskutiert. Die $\mathcal{O}(\varepsilon)$, die hier zusätzlich auftritt, beschreibt die Störung des Grundzustandes durch die mit dem Index $\tilde{}$ gekennzeichneten akustischen Größen.

Soll bei der Lösung nach dem Schema der Störungsrechnung vorgegangen werden, so müssen zunächst die Strömungsfeldgleichungen der $\mathcal{O}(1)$ gelöst und diese Lösungen als Koeffizienten in $\mathcal{O}(Ma^2)$ eingesetzt werden. Die Lösungen der $\mathcal{O}(1)$ und $\mathcal{O}(Ma^2)$ gehen anschließend als Koeffizienten in die akustischen Gleichungen der $\mathcal{O}(\varepsilon)$ ein. Sie beschreiben den Strömungsfeldeinfluß auf die akustischen Gleichungen.

Insoweit ergibt sich bei der Störungsrechnung keine Änderung gegenüber BLOKHINTZEV's Vorgehen. Die hier vorgenommene Skalierung der Größen in den Gleichungen erlaubt es dagegen unmittelbar, die Rückwirkung der Akustik auf das Strömungsfeld zu entnehmen, die von BLOKHINTZEV pauschal als vernachlässigbar unterstellt wurde.

Durch den singulären Charakter der akustischen Gleichungen für $Ma \to 0$, ε = konstant bleiben wegen des Auftretens von Termen der $\mathcal{O}\left(\frac{\varepsilon}{Ma}\right)$ und $\mathcal{O}\left(\frac{\varepsilon}{Ma^2}\right)$ nicht alle akustischen Terme auf die $\mathcal{O}(\varepsilon)$ beschränkt. Der größte von ihnen ist dann ein Maß für die Rückwirkung der akustischen Größen auf das Strömungsfeld.

Ein Beispiel soll verdeutlichen, daß bei der Schallausbreitung in der Atmosphäre diese Rückwirkung unbedingt beachtet werden muß: Für einen Schalldruckpegel von 9o dB beträgt $\varepsilon \approx 4.5 \cdot 1o^{-6}$ und für eine Strömungsgeschwindigkeit von 1 m/s beträgt $Ma \approx 3 \cdot 1o^{-3}$, so daß sich für $\frac{\varepsilon}{Ma^2} \approx 0.5$ ergibt, d. h. die Rückwirkung der Akustik liegt in der Größenordnung der Gleichungen des Strömungsfeldes $\mathcal{O}(1)$! Unter diesen Umständen können Strömungsfeldgrößen und akustische Größen nicht mehr getrennt werden; das Vorgehen von BLOKHINTZEV ist inkonsistent. Während BLOKHINTZEV's durch Linearisierung gewonnene Gleichungssysteme diesen Fehler verdecken, zeigt die Systematik der Störungsrechnung hier unmittelbar, mit welchem Restfehler eine Trennung von Akustik und Strömungsmechanik möglich ist.

Kritisch sind hohe Schalldruckpegel und niedrige Strömungsgeschwindigkeiten. Eine getrennte Lösung des strömungsmechanischen und akustischen Gleichungssystemes setzt voraus, daß der Restfehler von der $\mathcal{O}\left(\frac{\varepsilon}{Ma^2}\right)$ wesentlich kleiner ist als die $\mathcal{O}(1)$ der Strömungsfeldgleichungen. Wird gefordert, daß der Restfehler der Strömungsfeld-

gleichungen der $\mathcal{O}(1)$ kleiner ist als δ , so ergibt sich der folgende Zusammenhang zwischen dem maximal zulässigen Schalldruckpegel L_{max} und der minimal zulässigen Strömungsgeschwindigkeit $v_{r_{min}}$:

$$L_{max} = 20 \log \left(\frac{\delta \gamma p_r}{p_0'} \frac{v_{r\,min}^2}{c_r^2} \right) \; ; \; (p_0' = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}) \qquad (4.2.2/18)$$

Der Restfehler kann im Experiment sinnvoll aus der Meßgenauigkeit abgeleitet werden. Für diese theoretische Untersuchung wird er zu 1 % angesetzt.

Bild 4/1 (Kurve 1) zeigt den Zusammenhang zwischen L_{max} und $v_{r_{min}}$.

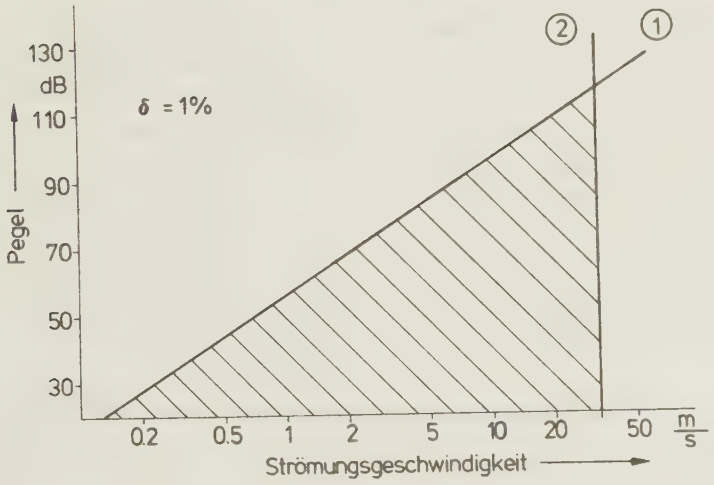

Bild 4/1 Gültigkeitsbereich der Gleichungen (4.2.2/24) bis (4.2.2/27)

Eine Berücksichtigung der $\mathcal{O}(Ma^2)$ ist unter diesen Umständen nicht sinnvoll, da sie von kleinerer Größenordnung ist als die singulären Terme der $\mathcal{O}(\varepsilon)$. Soll der durch die Vernachlässigung der $\mathcal{O}(Ma^2)$ in den Strömungsfeldgleichungen hervorgerufene Restfehler des Strömungsfeldes ebenfalls höchstens 1 % betragen, so muß der Gültigkeitsbereich auf

$$\delta \geq Ma^2 \qquad (4.2.2/19)$$

beschränkt werden. (Kurve 2 in Bild 4/1)

In den akustischen Gleichungen ist dann die Koeffizientengenauigkeit im schraffierten Bereich ebenfalls 1 % . Auch hier müssen dann selbstverständlich die Koeffizienten der $\mathcal{O}(Ma^2)$ vernachlässigt werden. Das führende Verhalten der akustischen Gleichungen ist durch die größten in der $\mathcal{O}(\varepsilon)$ auftretenden Terme gegeben. Es sind dies die Glieder der $\mathcal{O}(\varepsilon)$ und $\mathcal{O}\left(\frac{\varepsilon}{Ma}\right)$ in der Kontinuitätsgleichung (4.2.2/14) , in der Bewegungsgleichung (4.2.2/15) die der $\mathcal{O}\left(\frac{\varepsilon}{Ma^2}\right)$ und $\mathcal{O}\left(\frac{\varepsilon}{Ma}\right)$, in der Zustandsgleichung (4.2.2/16) $\mathcal{O}(\varepsilon)$ und in der Energiegleichung (4.2.2/17) $\mathcal{O}\left(\frac{\varepsilon}{Ma}\right)$ und $\mathcal{O}(\varepsilon)$.

Die größten in den akustischen Gleichungen vernachlässigten Terme liegen dann ebenfalls in der $\mathcal{O}(Ma^2)$ bezüglich der Größenordnung des führenden Termes in jeder Gleichung. Sie sind demnach kleiner als 1 % im durch Bild 4/1 dargestellten Gültigkeitsbereich.

Wir sind nun in der Lage, allgemeine asymptotische strömungsmechanische und akustische Gleichungen für die akustische Wellenausbreitung im inhomogenen Strömungsfeld niedriger Strömungsgeschwindigkeit für $\varepsilon \to 0$; $Ma \to 0$ und $\frac{\varepsilon}{Ma^2}$ = konstant anzugeben. Der Restfehler dieser Gleichungen ist von $\mathcal{O}(\delta)$ auf der Skala L_r .
Die Strömungsfeldgleichungen sind mit den im Kapitel 4.1 diskutierten Gleichungen identisch. Sie beschreiben ein inkompressibles Strömungsfeld:

Kontinuitätsgleichung :

$$\hat{\rho}_0 \, \mathrm{div}^* \, \hat{\vec{v}}_0 = 0 \qquad (4.2.2/20)$$

Bewegungsgleichung :

$$\hat{\rho}_0 \left(\hat{\vec{v}}_0 \cdot \mathrm{grad}^* \right) \hat{\vec{v}}_0 + \mathrm{grad}^* \, \hat{p}_0 = 0 \qquad (4.2.2/21)$$

Zustandsgleichung :

$$1 - \hat{\rho}_0 \, \hat{T}_0 = 0 \qquad (4.2.2/22)$$

Energiegleichung :

$$\hat{\rho}_0 \, \hat{\vec{v}}_0 \, \mathrm{grad}^* \, \hat{T}_0 = 0 \qquad (4.2.2/23)$$

Die Lösungen dieses Gleichungssystems treten als Koeffizienten in dem folgenden partiellen Differentialgleichungssystem auf. Es beschreibt den Einfluß des inkompressiblen Strömungsfeldes auf das akustische Feld in der Strömung.

Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \tilde{\rho}_0}{\partial t^*} + \frac{\tilde{\vec{v}}_0}{Ma} \operatorname{grad}^* \hat{\rho}_0 + \hat{\vec{v}}_0 \operatorname{grad}^* \tilde{\rho}_0 + \frac{\hat{\rho}_0}{Ma} \operatorname{div}^* \tilde{\vec{v}}_0 + \tilde{\rho}_0 \operatorname{div}^* \hat{\vec{v}}_0 = 0 \qquad (4.2.2/24)$$

Bewegungsgleichung

$$\frac{\hat{\rho}_0}{Ma} \cdot \left(\frac{\partial \tilde{\vec{v}}_0}{\partial t^*} + \left(\hat{\vec{v}}_0 \cdot \operatorname{grad}^*\right) \tilde{\vec{v}}_0 + \left(\tilde{\vec{v}}_0 \cdot \operatorname{grad}^*\right) \hat{\vec{v}}_0 \right) + \operatorname{grad}^* \frac{\tilde{p}_0}{Ma^2} = 0 \qquad (4.2.2/25)$$

Zustandsgleichung

$$\gamma \tilde{p}_0 - \hat{T}_0 \tilde{\rho}_0 - (\gamma - 1) \hat{\rho}_0 \tilde{T}_0 = 0 \qquad (4.2.2/26)$$

Energiegleichung

$$\hat{\rho}_0 \cdot \left((\gamma - 1) \frac{\partial \tilde{T}_0}{\partial t^*} + (\gamma - 1) \hat{\vec{v}}_0 \operatorname{grad}^* \tilde{T}_0 + \frac{\tilde{\vec{v}}_0}{Ma} \operatorname{grad}^* \hat{T}_0 \right) + \tilde{\rho}_0 \hat{\vec{v}}_0 \operatorname{grad}^* \hat{T}_0 - (\gamma - 1) \cdot \left(\frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial t^*} + \hat{\vec{v}}_0 \operatorname{grad}^* \tilde{p}_0 \right) = 0 \qquad (4.2.2/27)$$

Diese Gleichungen sind konsistent. Sie enthalten nur Größen, die kleiner als die akustische Rückwirkung auf das Strömungsfeld sind, d. h. im führenden Verhalten der akustischen Gleichungen tauchen keine Strömungsfeldkoeffizienten der $\mathcal{O}(Ma^2)$ auf.

In dimensionsbehafteter Form lauten die akustischen Gleichungen

$$\frac{\partial \rho_0'}{\partial t} + \vec{v}_0 \operatorname{grad} \rho_0' + \vec{v}_0' \operatorname{grad} \rho_0 + \rho_0 \operatorname{div} \vec{v}_0' + \rho_0' \operatorname{div} \vec{v}_0 = 0 \qquad (4.2.2/28)$$

$$\rho_0 \cdot \left(\frac{\partial \vec{v}_0'}{\partial t} + \left(\vec{v}_0 \cdot \operatorname{grad}\right) \vec{v}_0' + \left(\vec{v}_0' \cdot \operatorname{grad}\right) \vec{v}_0 \right) + \operatorname{grad} p_0' = 0 \qquad (4.2.2/29)$$

$$p_0' - c_p \frac{\gamma - 1}{\gamma} (T_0 \rho_0' + \rho_0 T_0') = 0 \qquad (4.2.2/30)$$

$$c_p \rho_0 \cdot \left(\frac{\partial T_0'}{\partial t} + \vec{v}_0 \text{ grad } T_0' + v_0' \text{ grad } T_0 \right)$$

$$- \left(\frac{\partial p_0'}{\partial t} + \vec{v}_0 \text{ grad } p_0' \right) = 0 \qquad (4.2.2/31)$$

Die akustischen Größen sind durch ' gekennzeichnet, die strömungsmechanischen sind ungestrichen.

Die Gleichungen (4.2.2/3o) und (4.2.2/31) können zusammengefaßt werden zu :

$$\frac{\partial p_0'}{\partial t} + \vec{v}_0 \text{ grad } p_0' - c^2 \cdot \left(\frac{\partial \rho_0'}{\partial t} + \vec{v}_0 \text{ grad } \rho_0' + \vec{v}_0' \text{grad } \rho_0 \right)$$

$$= 0 \qquad (4.2.2/32)$$

mit der Schallgeschwindigkeit

$$c = c(T_0) = \sqrt{c_p (\gamma - 1) T_0} \qquad (4.2.2/33)$$

Wird die Gleichung (4.2.2/32) in die Gleichung (4.2.2/28) eingesetzt, so ergeben sich mit der Gleichung (4.2.2/29) die folgenden akustischen Gleichungen :

$$\frac{\partial p_0'}{\partial t} + \vec{v}_0 \text{ grad } p_0' + c^2 (\rho_0 \text{ div } \vec{v}_0' + \rho_0' \text{ div } \vec{v}_0) = 0 \qquad (4.2.2/34)$$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \vec{v}_0'}{\partial t} + \left(\vec{v}_0 \cdot \text{grad}\right) \vec{v}_0' + \left(\vec{v}_0' \cdot \text{grad}\right) \vec{v}_0 \right) + \text{grad } p_0' = 0 \qquad (4.2.2/35)$$

In diesen Gleichungen hängen alle Größen von den Ortskoordinaten x, y, z ab, die mit ' gekennzeichneten akustischen Größen auch von der Zeit t .

Aus der Gleichung (4.1.3/3) folgt für (4.2.2/34) :

$$\frac{\partial p_0'}{\partial t} + \vec{v}_0 \text{ grad } p_0' + c^2 \rho_0 \text{ div } \vec{v}_0' = 0 \qquad (4.2.2/36)$$

Mit der dimensionslosen Schallgeschwindigkeit : $\hat{c}_0$

$$\hat{c}_0^2 = \frac{c^2}{c_r^2} = \frac{T}{T_r} = \hat{T}_0 = \frac{1}{\hat{\rho}_0} \qquad (4.2.2/37)$$

erhält man die Gleichungen (4.2.2/36) und (4.2.2/35) in dimensionsloser Form:

$$\frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial t^*} + \hat{\vec{v}}_0 \, \mathrm{grad}^* \tilde{p}_0 + \hat{c}_0^2 \frac{\hat{\rho}_0}{Ma} \, \mathrm{div}^* \tilde{\vec{v}}_0 = 0 \qquad (4.2.2/38)$$

$$\hat{\rho}_0 \left(\frac{\partial \tilde{\vec{v}}_0}{\partial t^*} + \left(\hat{\vec{v}}_0 \cdot \mathrm{grad}^*\right) \tilde{\vec{v}}_0 + \left(\tilde{\vec{v}}_0 \cdot \mathrm{grad}^*\right) \hat{\vec{v}}_0 \right) + \frac{1}{Ma} \, \mathrm{grad}^* \tilde{p}_0 = 0 \qquad (4.2.2/39)$$

Für spätere Anwendungen wird nun eine akustische Zeitskala $\tilde{t}$ eingeführt :

$$\tilde{t} = \frac{c_r}{L_r} \, t$$

Mit (4.1.1/11) folgt:

$$\tilde{t} = \frac{c_r}{v_r} \, t^* = \frac{1}{Ma} \, t^*$$

Umskalieren von (4.2.2/38) und (4.2.2/39) mit Hilfe von

$\frac{\partial}{\partial t^*} = \frac{\partial \tilde{t}}{\partial t^*} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} = \frac{1}{Ma} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}}$ und Multiplikation mit Ma ergibt:

$$\frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \tilde{t}} + Ma \, \hat{\vec{v}}_0 \, \mathrm{grad}^* \tilde{p}_0 + \hat{c}_0^2 \hat{\rho}_0 \, \mathrm{div}^* \tilde{\vec{v}}_0 = 0 \qquad (4.2.2/40)$$

$$\hat{\rho}_0 \cdot \left(\frac{\partial \tilde{\vec{v}}_0}{\partial \tilde{t}} + Ma \left(\hat{\vec{v}}_0 \cdot \mathrm{grad}^*\right) \tilde{\vec{v}}_0 + Ma \left(\tilde{\vec{v}}_0 \cdot \mathrm{grad}^*\right) \hat{\vec{v}}_0 \right) + \mathrm{grad}^* \tilde{p}_0 = 0 \qquad (4.2.2/41)$$

4.2.3 Energiebeziehungen

Wie bei den linearisierten akustischen Gleichungen im ruhenden Medium, wurden auch für die von BLOKHINTZEV angegebenen linearen akustischen Gleichungen im zeitinvarianten Strömungsfeld Energiebeziehungen aufgestellt. Diese Beziehungen haben große theoretische Bedeutung. Sie können aber auch wie in Kapitel 4.3.3 beschrieben wird, bei der Lösung der Wellengleichung mit geometrisch-akustischen Methoden dazu verwendet werden, um auf einfachere Weise den Schalldruck zu berechnen.

Für die linearisierten akustischen Gleichungen im ruhenden Medium lautet die Differentialgleichung für Energiedichte E und akustische Intensität $\vec{I}_R$:

$$\frac{\partial E_R}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{I}_R = 0 \qquad (4.2.3/1)$$

mit

$$E_R = \frac{p'^2}{2 \rho_0 c_0^2} + \frac{\rho_0 |\vec{v}'|^2}{2} \qquad (4.2.3/2)$$

$$\vec{I}_R = p' \vec{v}' \qquad (4.2.3/3)$$

Diese Gleichungen beschreiben nicht die gesamte akustische Energiebilanz, wie SCHOCH (1953) zeigen konnte, da sie die Terme der nichtlinearen Akustik unberücksichtigt lassen, also einen Fehler in der Größenordnung der nichtlinearen akustischen Größen beinhalten. Es handelt sich hierbei um einen unvermeidlichen Linearisierungsfehler, der immer auftritt, wenn die nichtlinearen akustischen Anteile vernachlässigt werden.

MORSE & INGARD (1961) haben eine Energiebeziehung für die akustische Wellenausbreitung im zeitinvarianten Strömungsfeld in der Form

$$\vec{I} = \overline{\vec{N}} - \overline{\vec{N}\ (\text{ohne Schall})} \qquad (4.2.3/4)$$

N = gesamte Energiestromdichte

vorgeschlagen, wobei der Index $\overline{}$ die zeitliche Mittelung symbolisiert. Diese zweifellos korrekteste Definition wurde aus mehreren Gründen nicht weiter verfolgt, u. a.: um die akustische Intensität nach (4.3.2/4) zu berechnen müssen in $\vec{N}$ auch die nichtlinearen akustischen Anteile berücksichtigt werden. Diese Berechnung er-

weist sich außer in sehr einfachen Fällen als so kompliziert, daß eine praktische Verwendung dieser Beziehung häufig nicht möglich ist. Weiterhin hat diese Beziehung den Nachteil, für ruhendes Medium nicht mit dem durch (4.2.3/1) - (4.2.3/3) gegebenen Gleichungssystem verträglich zu sein.

MORFEY (1971) hat eine Verallgemeinerung der Energiebeziehungen für die akustische Wellenausbreitung im inhomogenen Strömungsfeld vorgeschlagen, die die Nachteile von MORSE & INGARD's Ansatz vermeidet. Sie nimmt dafür aber wie die Gleichungen (4.2.3/1) - (4.2.3/3), einen Fehler der Größenordnung der nichtlinearen akustischen Größen in Kauf. MORFEY's Definition wird, wie EVERSMAN (1979) ausführt, heute weitestgehend akzeptiert. GOLDSTEIN (1976) hat gezeigt, wie sich die verallgemeinerten Größen für E und $\vec{I}$ aus BLOKHINTZEV's akustischen Gleichungen gewinnen lassen.

MORFEY's Gleichungen sind allgemeiner; sie berücksichtigen in den akustischen Gleichungen auch Verluste durch Viskosität und Wärmeleitung, die hier nicht berücksichtigt werden. Sie beinhalten aber für niedrige Strömungsgeschwindigkeiten den gleichen Linearisierungsfehler wie die Gleichungen von BLOKHINTZEV.

Im folgenden wird gezeigt, wie sich eine Beziehung zwischen E und $\vec{I}$ für die asymptotischen akustischen Gleichungen (4.2.2/40), (4.2.2/41) gewinnen läßt. Die Rechnung orientiert sich an GOLDSTEIN's Vorgehen. Es werden die Gleichungen in dimensionsloser Schreibweise verwendet. Wie bereits erwähnt, sind sie korrekt einschließlich $\mathcal{O}(\mathrm{Ma})$ für $\frac{\varepsilon}{\mathrm{Ma}^2} < \delta$.

Dividiert man (4.2.2/40) durch $\hat{c}_0^2$ und multipliziert mit

$$\frac{\tilde{p}_0}{\hat{\rho}_0} + \mathrm{Ma}\, \hat{\vec{v}}_0 \tilde{\vec{v}}_0 \qquad (4.2.3/5)$$

und (4.2.2/41) mit

$$\tilde{\vec{v}}_0 + \mathrm{Ma}\, \frac{\tilde{p}_0}{\hat{\rho}_0 \hat{c}_0^2} \hat{\vec{v}}_0 \qquad (4.2.3/6)$$

und addiert beide Gleichungen, so ergibt sich :

$$\frac{1}{c_0^2}\left(\frac{\tilde{p}_0}{\hat{\rho}_0} + Ma\ \hat{\vec{v}}_0\ \tilde{\vec{v}}_0\right)\frac{\partial\ \tilde{p}_0}{\partial\ \tilde{t}} + \hat{\rho}_0\left(\tilde{\vec{v}}_0 + Ma\ \frac{\tilde{p}_0}{\hat{\rho}_0\ \hat{c}_0^2}\ \hat{\vec{v}}_0\right)\frac{\partial\ \hat{\vec{v}}_0}{\partial\ \tilde{t}}$$

$$+ Ma\left(\frac{\tilde{p}_0}{\hat{\rho}_0} + Ma\ \hat{\vec{v}}_0\ \tilde{\vec{v}}_0\right)\frac{\hat{\vec{v}}_0}{\hat{c}_0^2}\ grad^*\ \tilde{p}_0 + \hat{\rho}_0\left(\frac{\tilde{p}_0}{\hat{\rho}_0} + Ma\ \hat{\vec{v}}_0\ \tilde{\vec{v}}_0\right)div^*\ \tilde{\vec{v}}_0$$

$$+ Ma\ \hat{\rho}_0\left(\tilde{\vec{v}}_0 + Ma\ \frac{\tilde{p}_0}{\hat{\rho}_0\ \hat{c}_0^2}\right)\left(\hat{\vec{v}}_0\cdot grad^*\right)\tilde{\vec{v}}_0 + Ma\ \hat{\rho}_0\left(\tilde{\vec{v}}_0 + Ma\ \frac{\tilde{p}_0}{\hat{\rho}_0\ \hat{c}_0^2}\hat{\vec{v}}_0\right)$$

$$\cdot\left(\tilde{\vec{v}}_0\cdot grad^*\right)\hat{\vec{v}}_0 + \left(\tilde{\vec{v}}_0 + Ma\ \frac{\tilde{p}_0}{\hat{\rho}_0\hat{c}_0^2}\hat{\vec{v}}_0\right)grad^*\tilde{p}_0 = 0$$

(4.2.3/7)

Die zeitveränderlichen Terme der Gleichung können in der Form

$$\frac{1}{\hat{c}_0^2}\left(\frac{\tilde{p}_0}{\hat{\rho}_0} + Ma\ \hat{\vec{v}}_0\ \tilde{\vec{v}}_0\right)\frac{\partial\ \tilde{p}_0}{\partial\ \tilde{t}} + \hat{\rho}_0\left(\tilde{\vec{v}}_0 + Ma\frac{p}{\hat{\rho}_0\hat{c}_0^2}\hat{\vec{v}}_0\right)\frac{\partial\ \tilde{\vec{v}}_0}{\partial\ \tilde{t}} =$$

$$\frac{\partial}{\partial\ \tilde{t}}\left(\frac{1}{2\ \hat{\rho}_0\hat{c}_0^2}\ \tilde{p}_0^2 + \frac{1}{2}\ \hat{\rho}_0|\tilde{\vec{v}}_0|^2 + Ma\ \frac{\tilde{p}_0}{\hat{c}_0^2}\tilde{\vec{v}}_0\ \hat{\vec{v}}_0\right)$$

geschrieben werden, weil alle strömungsmechanischen (^) Größen zeitinvariant sind. Dadurch erhält man für die skalierte Energiedichte $\tilde{E}$:

$$\tilde{E} = \frac{1}{2\ \hat{\rho}_0\hat{c}_0^2}\tilde{p}_0^2 + \frac{1}{2}\ \hat{\rho}_0\ |\tilde{\vec{v}}_0|^2 + Ma\ \frac{\tilde{p}_0}{\hat{c}_0^2}\tilde{\vec{v}}_0\ \hat{\vec{v}}_0 \qquad (4.2.3/8)$$

Die Gleichung (4.1.3/3) erlaubt es,

$$Ma\ \frac{\tilde{p}_0}{\hat{\rho}_0\ \hat{c}_0^2}\left(\tilde{p}_0 + Ma\ \hat{\rho}_0\ \hat{\vec{v}}_0\ \tilde{\vec{v}}_0\right)div^*\ \hat{\vec{v}}_0$$

in (4.2.3/7) zu addieren. Man erhält :

$$Ma\frac{\tilde{p}}{\hat{\rho}_0\ \hat{c}_0^2}\left(\tilde{p}_0 + Ma\ \hat{\rho}_0\ \hat{\vec{v}}_0\ \tilde{\vec{v}}_0\right)div^*\ \hat{\vec{v}}_0 + Ma\left(\frac{\tilde{p}_0}{\hat{\rho}_0} + Ma\ \hat{\vec{v}}_0\ \tilde{\vec{v}}_0\right)\frac{\hat{\vec{v}}_0}{\hat{c}_0^2}grad^*\ \tilde{p}_0$$

$$= A_1$$

$$A_1 = Ma\ \frac{\tilde{p}_0}{\hat{\rho}_0\ \hat{c}_0^2}\left(\tilde{p}_0 + Ma\ \hat{\rho}_0\ \hat{\vec{v}}_0\ \tilde{\vec{v}}_0\right)div^*\ \hat{\vec{v}}_0 + Ma\ \left(\tilde{p}_0 + Ma\ \hat{\rho}_0\ \hat{\vec{v}}_0\ \tilde{\vec{v}}_0\right)\cdot$$

$$\hat{\vec{v}}_0\ grad^*\ \frac{\tilde{p}_0}{\hat{\rho}_0\ \hat{c}_0^2} - Ma\ \tilde{p}_0\left(\tilde{p}_0 + Ma\ \hat{\rho}_0\ \hat{\vec{v}}_0\ \tilde{\vec{v}}_0\right)\hat{\vec{v}}_0\ grad^*\ \frac{1}{\hat{\rho}_0\ \hat{c}_0^2}$$

Wegen (4.1.2/8) und (4.2.2/37) ist der letzte Term gleich null :

$$A_1 = (\tilde{p}_0 + Ma\ \hat{\rho}_0\ \hat{\vec{v}}_0\ \tilde{\vec{v}}_0)\ div^*\ (Ma\ \frac{\tilde{p}_0}{\hat{\rho}_0 \hat{c}_0^2}\ \hat{\vec{v}}_0)$$

Die Summe aus A_1 und $\hat{\rho}_0(\frac{\tilde{p}_0}{\hat{\rho}_0} + Ma\ \hat{\vec{v}}_0\ \tilde{\vec{v}}_0)\ div^*\ \tilde{\vec{v}}_0$ ergibt :

$$A_2 = (\tilde{p}_0 + Ma\ \hat{\rho}_0\ \hat{\vec{v}}_0\ \tilde{\vec{v}}_0)\ div^*\ (Ma\ \frac{\tilde{p}_0}{\hat{\rho}_0 \hat{c}_0^2}\ \hat{\vec{v}}_0 + \tilde{\vec{v}}_0)$$

Weiterhin gilt:

$$Ma\ \hat{\rho}_0\ (\tilde{\vec{v}}_0 + Ma\ \frac{\tilde{p}_0}{\hat{\rho}_0 \hat{c}_0^2}\hat{\vec{v}}_0)(\hat{\vec{v}}_0 \cdot grad^*)\tilde{\vec{v}}_0 + Ma\ \hat{\rho}_0(\tilde{\vec{v}}_0 + Ma\ \frac{\tilde{p}_0}{\hat{\rho}_0 \hat{c}_0^2}\ \hat{\vec{v}}_0) \cdot (\tilde{\vec{v}}_0 \cdot grad^*)\hat{\vec{v}}_0 =$$

$$Ma\ \hat{\rho}_0\ (\tilde{\vec{v}}_0 + Ma\frac{\tilde{p}_0}{\hat{\rho}_0 \hat{c}_0^2}\hat{\vec{v}}_0)\Big(grad^*(\hat{\vec{v}}_0 \cdot \tilde{\vec{v}}_0) - \tilde{\vec{v}}_0 \times rot^*\ \hat{\vec{v}}_0 - \tilde{\vec{v}}_0 \times rot^*\ \tilde{\vec{v}}_0\Big) =$$

$$Ma\ (\tilde{\vec{v}}_0 + Ma\ \frac{\tilde{p}_0}{\hat{\rho}_0 \hat{c}_0^2}\hat{\vec{v}}_0)\Big(grad^*(\hat{\rho}_0\ \hat{\vec{v}}_0 \cdot \tilde{\vec{v}}_0) - (\tilde{\vec{v}}_0\ \hat{\vec{v}}_0)\ grad^*\ \hat{\rho}_0\Big) -$$

$$Ma\ (\hat{\rho}_0\ \tilde{\vec{v}}_0 + Ma\frac{\tilde{p}_0}{\hat{c}_0^2}\hat{\vec{v}}_0) \cdot \Big(\tilde{\vec{v}}_0 \times rot^*\ \hat{\vec{v}}_0 + \hat{\vec{v}}_0 \times rot^*\ \tilde{\vec{v}}_0\Big)$$

$$= A_3$$

Der zweite Summand kann vereinfacht werden zu

$$Ma\ (\hat{\rho}_0\ \tilde{\vec{v}}_0)\ (\hat{\vec{v}}_0 \times rot^*\ \tilde{\vec{v}}_0) + Ma^2\ \tilde{p}_0\ \hat{\vec{v}}_0\ (\tilde{\vec{v}}_0 \times rot^*\ \hat{\vec{v}}_0)$$

Für die Summe aus A_3 und $(\tilde{\vec{v}}_0 + Ma\ \frac{\tilde{p}_0}{\hat{\rho}_0 \hat{c}_0^2} grad^* \tilde{p}_0)$ ergibt sich

$$(\tilde{\vec{v}}_0 + Ma\ \frac{\tilde{p}_0}{\hat{\rho}_0 \hat{c}_0^2}\hat{\vec{v}}_0)grad^*(\tilde{p}_0 + Ma\ \hat{\rho}_0\ \hat{\vec{v}}_0\ \tilde{\vec{v}}_0)$$

$$- Ma\ (\tilde{\vec{v}}_0 + Ma\ \frac{\tilde{p}_0}{\hat{\rho}_0 \hat{c}_0^2}\hat{\vec{v}}_0)(\tilde{\vec{v}}_0\ \hat{\vec{v}}_0)\ grad^*\ \hat{\rho}_0$$

$$- Ma\ (\hat{\rho}_0\ \tilde{\vec{v}}_0)\ (\hat{\vec{v}}_0 \times rot^*\ \tilde{\vec{v}}_0) - Ma^2 \frac{\tilde{p}_0}{\hat{c}_0^2}\ \hat{\vec{v}}_0\ (\tilde{\vec{v}}_0 \times rot^*\ \hat{\vec{v}}_0) = A_4$$

Für $A_2 + A_4$ erhält man schließlich

$$A_2 + A_4 = div^*\Big((\tilde{p}_0 + Ma\ \hat{\rho}_0\ \hat{\vec{v}}_0\ \tilde{\vec{v}}_0)\ (\tilde{\vec{v}}_0 + Ma\ \frac{\tilde{p}_0}{\hat{\rho}_0 \hat{c}_0^2}\ \hat{\vec{v}}_0)\Big) -$$

$$Ma\ (\tilde{\vec{v}}_0 + Ma\ \frac{\tilde{p}_0}{\hat{\rho}_0 \hat{c}_0^2}\hat{\vec{v}}_0)(\tilde{\vec{v}}_0\ \hat{\vec{v}}_0)\ grad^*\ \hat{\rho}_0 -$$

$$- \mathrm{Ma}\ (\hat{\rho}_0\ \tilde{\vec{v}}_0)\ (\hat{\vec{v}}_0 \times \mathrm{rot}^*\ \tilde{\vec{v}}_0) - \mathrm{Ma}^2\ \frac{\tilde{p}_0 \hat{\rho}}{\tilde{c}_0^2} \vec{v}_0\ (\tilde{\vec{v}}_0 \times \mathrm{rot}^*\ \hat{\vec{v}}_0) \qquad (4.2.3/9)$$

Wegen (4.1.3/4) läßt sich die obige Gleichung noch vereinfachen. wird nun

$$\tilde{\tilde{I}} = (\tilde{p}_0 + \mathrm{Ma}\ \hat{\rho}_0\ \hat{\vec{v}}_0\ \tilde{\vec{v}}_0)\ (\tilde{\vec{v}}_0 + \mathrm{Ma}\ \frac{\tilde{p}_0}{\rho_0 \tilde{c}_0^2}\ \hat{\vec{v}}_0) \qquad (4.2.3/10)$$

gesetzt, so kann (4.2.3/9) in der Form :

$$\frac{\partial \tilde{E}}{\partial t} + \mathrm{div}^*\ \tilde{\tilde{I}} -$$

$$\mathrm{Ma}\ \tilde{\vec{v}}_0 \cdot \left((\tilde{\vec{v}}_0\ \hat{\vec{v}}_0)\ \mathrm{grad}^*\ \hat{\rho}_0 + \hat{\rho}_0\ \hat{\vec{v}}_0 \times \mathrm{rot}^*\ \tilde{\vec{v}}_0 - \mathrm{Ma}\ \frac{\tilde{p}_0 \hat{\rho}}{\tilde{c}_0^2} \vec{v}_0 \times \mathrm{rot}^*\ \hat{\vec{v}}_0 \right)$$

$$= 0 \qquad (4.2.3/11)$$

geschrieben werden.

In dimensionsbehafteter Schreibweise lauten (4.2.3/8), (4.2.3/10) und (4.2.3/11)

$$E = \frac{p_0'^2}{2\ \rho_0\ c^2} + \frac{\rho_0\ |\vec{v}_0'|^2}{2} + \frac{1}{c^2}\ p_0'\ \vec{v}_0\ \vec{v}_0' \qquad (4.2.3/12)$$

$$\vec{I} = (p_0' + \rho_0\ \vec{v}_0\ \vec{v}_0')\ (\vec{v}_0' + \frac{p_0'}{\rho_0\ c^2}\ \vec{v}_0) \qquad (4.2.3/13)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \mathrm{div}\ \vec{I} -$$

$$\vec{v}_0' \cdot \left((\vec{v}_0\ \vec{v}_0')\ \mathrm{grad}\ \rho_0 + \rho_0\ \vec{v}_0 \times \mathrm{rot}\ \vec{v}_0' - \frac{p_0'}{c^2}\ \vec{v}_0 \times\ \mathrm{rot}\ \vec{v}_0 \right)$$

$$= 0 \qquad (4.2.3/14)$$

Zur Verdeutlichung der Aussage dieser Gleichung soll zunächst davon ausgegangen werden, daß das Strömungsfeld rotationsfrei ist und $\tilde{\vec{v}}_0$ ebenfalls. Weiterhin soll angenommen werden, daß keine Temperatur- und damit Dichteänderung im Strömungsfeld vorliegt. (4.2.3/11) ergibt dann die Erhaltungsbeziehung

$$\frac{\partial \tilde{E}}{\partial t} + \mathrm{div}^*\ \tilde{\tilde{I}} = 0 \qquad (4.2.3/15)$$

Es bleibt auch in diesem Falle nicht die Energiedichte E_R erhalten, die nur akustische Größen beinhaltet, sondern die allgemeinere Größe E, die sowohl akustische als auch strömungsmechanische Größen beinhaltet.

Wie ist dieses Phänomen zu erklären ? Die akustische Welle im inhomogenen Strömungsfeld ist für sich genommen kein konservatives System. Sie ist in der Lage, mit der Strömung Energie auszutauschen. Sie kann also an die Strömung Energie abgeben oder aus ihr Energie beziehen, z.B. dadurch, daß sie durch das Strömungsfeld infolge der nichtkonstanten Strömungsgeschwindigkeit beschleunigt oder gebremst wird. Die bereits in Kapitel 4.2.1 diskutierte Wechselwirkung zwischen dem akustischen und dem strömungsmechanischen Gleichungssystem wird hier aus anderer Sicht dargestellt. Dort wurde gezeigt, daß eine Trennung in akustisches und strömungsmechanisches Gleichungssystem mit einem prinzipiellen Restfehler der $\mathcal{O}(\frac{\varepsilon}{Ma^2} = \delta)$ behaftet ist, der die Rückwirkung der akustischen Größen auf das Strömungsfeld beschreibt,und es deshalb nur sinnvoll ist, in den strömungsmechanischen Gleichungen Größen zu berücksichtigen, die größer als der Restfehler sind und daher nur unwesentlich durch die akustische Störung beeinflußt werden.

Aus der hier dargestellten Sichtweise ergibt sich, daß die akustische Welle mit dem Strömungsfeld Energie austauschen kann. Für eine sinnvolle Trennung in strömungsmechanische und akustische Gleichungen muß aber der Energieaustausch so klein sein, daß davon die Größen des Strömungsfeldes nicht wesentlich beeinflußt werden. In Bezug auf die akustischen Größen ist, wie hier gezeigt, der Energieaustausch aber groß genug, um diese wesentlich zu beeinflussen. Im Falle der rotationsbehafteten Strömung sind weitere Austauschmechanismen beteiligt, die verhindern, daß für die linearisierten akustischen Größen eine Erhaltungsgleichung in der Form (4.2.3/15) aufgestellt werden kann. Wie in Kapitel 2 beschrieben, ist das mittlere Strömungsfeld in der Nähe des Erdbodens immer drehbehaftet, wie man durch Rotationsbildung des logarithmischen Windprofils leicht bestätigt, so daß nicht von (4.2.3/15) ausgegangen werden kann. Es muß von der Beziehung (4.2.3/14) ausgegangen werden.

4.2.4 Vergleich mit den Ergebnissen anderer Autoren

Die ursprüngliche Zielsetzung war, lösbare Näherungsgleichungen für die komplizierten strömungsmechanischen (Gleichungen (3.3/8) - (3.3/11)) und akustischen Gleichungen (3.3/5) - (3.3/7) nach BLOKHINTZEV zu erhalten und damit eine Untersuchung der Schallausbreitung auch im nichtgeschichteten Strömungsfeld zu ermöglichen. Die erheblichen Vereinfachungen, die die hier vorgestellte Störungsrechnung für die Strömungsfeldgleichungen ergibt, wurden bereits im Kapitel 4.1 diskutiert. Für die akustischen Gleichungen sind die Ergebnisse der Störungsrechnung von grundsätzlicher Bedeutung.

In den vorigen Kapiteln konnte gezeigt werden, daß die implizite Unterstellung von BLOKHINTZEV, nach der das akustische Feld nur eine zu vernachlässigende Rückwirkung auf das Strömungsfeld hat, für niedrige Strömungsgeschwindigkeiten nicht richtig ist. Es konnte vielmehr gezeigt werden, daß eine Trennung der strömungsmechanisch-akustischen Gleichungen in einen strömungsmechanischen Grundzustand und eine überlagerte akustische Störung mit einem prinzipiellen Restfehler behaftet ist, der durch die Rückwirkung der akustischen Größen auf das Strömungsfeld gegeben ist. Während BLOKHINTZEV's Vorgehen diese Tatsache unberücksichtigt läßt, erlaubt es die hier angewandte Störungsrechnung, diesen Restfehler abzuschätzen und die Strömungsfeldgleichungen nur insoweit zu lösen, als sie vom akustischen Feld unbeeinflußt sind.

Die von BLOKHINTZEV pauschal vernachlässigte Rückwirkung kann für Strömungsgeschwindigkeiten und Schallpegel, wie sie in der Oberflächenschicht der Atmosphäre vorliegen, in den Strömungsfeldgleichungen nicht mehr vernachlässigt werden. Hier wird demgegenüber vorgeschlagen, die Beeinflussung des akustischen Feldes durch ein inhomogenes Strömungsfeld durch die akustische Wellenausbreitung in einer inkompressiblen Strömung zu beschreiben. Die dabei erhaltenen Gleichungen beinhalten in dem - in Bild 4/1 gegebenen - Gültigkeitsbereich einen Restfehler in der Größenordnung 1 %.

Vergleicht man die Gleichungen (4.2.2/28) und (4.2.2/29) mit denen von BLOKHINTZEV (3.3/5) - (3.3/7) so zeigt sich, daß die asymptotischen Gleichungen den Anteil $\frac{p'}{\rho_0 r}$ grad p_0 unberücksichtigt lassen.

Es ist daher auch nicht notwendig, den Druck im Strömungsfeld zu berechnen. Gegenüber BLOKHINTZEV's Gleichungen reduziert sich damit die Anzahl der Strömungsfeldkoeffizienten auf fünf, ρ_0 und $\vec{v}_0$.

Gegenüber THOMPSON's Gleichungen (3.3/12) - (3.3/14) für geschichtetes Strömungsfeld tritt zusätzlich der Anteil $\vec{v}_0'$ grad $\vec{v}_0$ auf. Im Falle des geschichteten Strömungsfeldes gehen die hier hergeleiteten Gleichungen in die von THOMPSON über.

Die durch die asymptotischen akustischen Gleichungen gegebenen Änderungen gegenüber BLOKHINTZEV's Gleichungen machen es notwendig, die Energiebeziehung neu zu diskutieren. Sie nimmt ebenfalls eine einfachere Form an. Anstelle der von GOLDSTEIN (1976) angegebenen Form:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{I} - \frac{1}{\rho_0} \left(\vec{v}_0' + \frac{\rho'}{\rho_0} \vec{v}_0\right) (\rho' \operatorname{grad} p_0 - p' \operatorname{grad} \rho_0)$$

$$- \frac{1}{2 \rho_0} \left(\rho' \frac{\partial p'}{\partial t} - p' \frac{\partial \rho'}{\partial t}\right) - \vec{v}_0' \cdot \left(\vec{v}_0 \times (\rho_0 \operatorname{rot} \vec{v}_0' - \rho_0' \operatorname{rot} \vec{v}_0) \right)$$

$$= 0$$

tritt die Beziehung (4.2.3/14), in der ρ' und p_0 nicht mehr auftauchen. Sie hat ebenso wie GOLDSTEINS's Gleichung im Gegensatz zu MORSE & INGARD's Vorschlag den Vorteil, für ruhendes Medium ($v_0 = 0$) in die Beziehung (4.2.3/1) - (4.2.3/3) überzugehen.

4.3 Lösung der asymptotischen Gleichungen nach der Methode der geometrischen Akustik

4.3.1 Die geometrisch-akustischen Gleichungen

Es soll nun untersucht werden, inwieweit geometrisch-akustische Methoden zur Lösung der Differentialgleichungen (4.2.2/34), (4.2.2/35) bzw. (4.2.2/40), (4.2.2/41) beitragen können. Beide Gleichungssysteme sind äquivalent. Da die dimensionslosen Gleichungen aber eine bessere Übersicht über die Größenordnung der einzelnen Faktoren ermöglichen, wird auch in diesem Kapitel, wie bisher, die Rechnung mit Hilfe von dimensionslosen Gleichungen durchgeführt. Nur die wesentlichen Ergebnisse werden auch in dimensionsbehafteter Form angegeben.

In der geometrischen Akustik werden periodische Lösungen kleiner Wellenlänge für die Gleichungen (4.2.2/40), (4.2.2/41) mit Hilfe einer modifizierten WKBJ-Approximation gesucht. Der hier gewählte Ansatz ähnelt dem der LUNEBERG - KLINE - Transformation /nach LUNEBERG (1944), KLINE & KAY (1965)/, ist aber wegen des inhomogenen und anisotropen Charakters der hier untersuchten Gleichungen etwas allgemeiner. Die Größen $\tilde{p}_0$ und $\vec{\tilde{v}}_0$ können in diesem Falle nicht aus einem skalaren Potential abgeleitet werden, weil das Strömungsfeld der Atmosphäre drehbehaftet ist. Wie man durch Differentiation des logarithmischen Windprofils des mittleren Strömungsfeldes leicht bestätigt, ist $\mathrm{rot}\ \vec{v} \neq 0$.

Es wird nun angenommen, daß die Wellenlänge λ_r klein ist auf der durch L_r gegebenen strömungsmechanischen Skala, d. h. der dimensionslose Störparameter $\tilde{k}$, der in der Größenordnung des Betrages des Wellenvektors liegt, erfüllt :

$$\tilde{k} = \frac{2\pi}{\lambda_r} L_r = k_r L_r >> 1$$

Eine Lösung von $\tilde{p}_0$ und $\vec{\tilde{v}}_0$ wird nun in Form einer lokal ebenen Welle gesucht /vergl. auch WHITHAM (1974)/ :

$$\underline{\tilde{p}} = e^{-j\,\tilde{k}\,\tilde{S}\,(\vec{r}^*,\tilde{t})} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(r^*)}{(-j\tilde{k})^n} \qquad (4.3.1/1)$$

$$\underline{\vec{v}}_0 = e^{-j\tilde{k}\tilde{S}(\vec{r}^*, \tilde{t})} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\underline{\vec{V}}_n(r^*)}{(-j\tilde{k})^n} \qquad (4.3.1/2)$$

S, $\underline{P}_n$ und $\underline{V}_n$ sind zunächst unbekannte Funktionen, die im Verlauf der Rechnung bestimmt werden. Durch Unterstreichung werden Größen als komplex gekennzeichnet. $S(\vec{r}^*, \tilde{t})$ ist die implizite Phasenfunktion der Welle; die Amplitude wird durch $\underline{P}_n$ bzw. $\underline{\vec{V}}_n$ sukzessive approximiert.

$\tilde{S}(\vec{r}^*, \tilde{t}) = 0$ definiert die Raumkurve der Ebene konstanter Phase. Es ist dies eine verallgemeinerte Funktion der Phasenbeziehung für die ebene Welle in einer Dimension, bei der sich der Phasenverlauf aus $k(x - c\,t)$ zu $x - c\,t = 0$; $x = c\,t$ berechnet.

Der Vorteil der Skalierung der Gleichungen wird auch hier deutlich: Die charakteristische Länge L_r der strömungsmechanischen durch * gekennzeichneten Skala war so gewählt, daß alle örtlichen Ableitungen auf ihr in der Größenordnung 1 liegen.

Örtliche Ableitungen von $\tilde{p}_0$ und $\underline{\vec{v}}_0$ für $n = 0$ sind dann automatisch in der Größenordnung $\tilde{k}$ auf der strömungsmechanischen Skala, d. h. an $\tilde{k}$ kann unmittelbar abgelesen werden, wie langsam sich das Strömungsfeld im Vergleich zu den akustischen Größen verändert und damit auch die Güte der Approximation.

Differentiation von (4.3.1/1) und (4.3.1/2) und Einsetzen in (4.2.2/40) und (4.2.2/41) ergibt :

$$-j\tilde{k}\frac{\partial\tilde{S}}{\partial\tilde{t}}\sum_n \frac{\underline{P}_n}{(-j\tilde{k})^n} + Ma\left(-j\tilde{k}\,(\underline{\vec{v}}_0 \,\mathrm{grad}^*\,\tilde{S})\sum_n \frac{\underline{P}_n}{(-j\tilde{k})^n} + \sum \underline{\vec{v}}_0 \,\mathrm{grad}^*\,\frac{\underline{P}_n}{(-j\tilde{k})^n}\right) - j\tilde{k}\hat{\rho}_0\hat{c}_0^2\sum \frac{\underline{\vec{V}}_n}{(-j\tilde{k})^n}\,\mathrm{grad}^*\,\tilde{S}$$

$$+\hat{\rho}_0\hat{c}_0^2\sum_n \mathrm{div}^*\,\frac{\underline{\vec{V}}_n}{(-j\tilde{k})^n} = 0 \qquad (4.3.1/3)$$

$$- j \tilde{k} \frac{\partial \tilde{\underline{S}}}{\partial t} \hat{\rho}_0 \sum_n \frac{\vec{\underline{V}}_n}{(- j \tilde{k})^n}$$

$$+ Ma \hat{\rho}_0 \left(- j \tilde{k} (\hat{\vec{v}}_0 \, grad^* \tilde{S}) \sum_n \frac{\vec{\underline{V}}_n}{(- j \tilde{k})^n} \right.$$

$$+ \sum_n \left(\hat{\vec{v}}_0 \cdot grad^*\right) \frac{\vec{\underline{V}}_n}{(- j \tilde{k})^n} + \sum_n \frac{\left(\vec{\underline{V}}_n \cdot grad^*\right) \hat{\vec{v}}_0}{(- j \tilde{k})^n}$$

$$\left. - j \tilde{k} \sum_n \frac{\underline{P}_n}{(- j \tilde{k})^n} grad^* \tilde{S} + \sum_n grad^* \frac{\underline{P}_n}{(- j \tilde{k})^n} \right) = 0$$

(4.3.1/4)

Durch Ordnen nach Potenzen von $(j \tilde{k})^n$ erhält man :

$\mathcal{O}(- j \tilde{k})$ Eikonalsystem :

$$\frac{\partial \tilde{\underline{S}}}{\partial t} \underline{P}_0 + Ma \, \underline{P}_0 \, \hat{\vec{v}}_0 \, grad^* \tilde{S} + \hat{\rho}_0 \hat{c}_0^2 \, \vec{\underline{V}}_0 \, grad^* \tilde{S} = 0 \quad (4.3.1/5)$$

$$\hat{\rho}_0 \frac{\partial \tilde{\underline{S}}}{\partial t} \vec{\underline{V}}_0 + Ma \, \hat{\rho}_0 \, \vec{\underline{V}}_0 \, (\hat{\vec{v}}_0 \, grad^* \tilde{S}) + \underline{P}_0 \, grad^* \tilde{S} = 0 \quad (4.3.1/6)$$

$\mathcal{O}(- j \tilde{k})^0$ Transportsystem 1. Ordnung

$$\frac{\partial \tilde{\underline{S}}}{\partial t} \underline{P}_1 + Ma \cdot \left(\underline{P}_1 \, \hat{\vec{v}}_0 \, grad^* \tilde{S} + \hat{\vec{v}}_0 \, grad^* \underline{P}_0 \right)$$

$$+ \hat{\rho}_0 \hat{c}_0^2 \, \vec{\underline{V}}_1 \, grad^* \tilde{S} + \hat{\rho}_0 \hat{c}_0^2 \, div^* \vec{\underline{V}}_0 = 0 \quad (4.3.1/7)$$

$$\frac{\partial \tilde{\underline{S}}}{\partial t} \hat{\rho}_0 \, \vec{\underline{V}}_1 + Ma \, \hat{\rho}_0 \cdot \left(\vec{\underline{V}}_1 \, (\hat{\vec{v}}_0 \, grad^* \tilde{S}) + \left(\hat{\vec{v}}_0 \cdot grad^*\right) \vec{\underline{V}}_0 + \left(\vec{\underline{V}}_0 \cdot grad^*\right) \hat{\vec{v}}_0 \right)$$

$$+ \underline{P}_1 \, grad^* \tilde{S} + grad^* \underline{P}_0 = 0 \quad (4.3.1/8)$$

$\mathcal{O}(j\,\tilde{k})^{-n+1}$ $n = 2,3$ Transportsysteme n-ter Ordnung

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \tilde{t}}\,\underline{P}_n + Ma\cdot\left(\underline{P}_n\,\hat{\vec{v}}_0\,\mathrm{grad}^*\,\tilde{S} + \hat{\vec{v}}_0\,\mathrm{grad}^*\,\underline{P}_{n-1}\right)$$

$$+\,\hat{\rho}_0\,\hat{c}_0^2\,\underline{V}_{n-1}\,\mathrm{grad}^*\,\tilde{S} + \hat{\rho}_0\,\hat{c}_0^2\,\mathrm{div}^*\,\underline{V}_{n-1} = 0 \qquad (4.3.1/9)$$

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \tilde{t}}\,\hat{\rho}_0\,\vec{\underline{V}}_n + Ma\,\hat{\rho}_0\left(\vec{\underline{V}}_n\left(\hat{\vec{v}}_0\cdot\mathrm{grad}^*\,\tilde{S}\right) + \left(\hat{\vec{v}}_0\cdot\mathrm{grad}^*\right)\vec{\underline{V}}_{n-1}\right.$$

$$\left.+\left(\vec{\underline{V}}_{n-1}\,\mathrm{grad}^*\right)\hat{\vec{v}}_0\right)$$

$$+\,\underline{P}_n\,\mathrm{grad}^*\,\tilde{S} + \mathrm{grad}^*\,\underline{P}_{n-1} = 0 \qquad (4.3.1/10)$$

Nach der Methode der Störungsrechnung werden wiederum zuerst die Gleichungen der $\mathcal{O}(-j\,\tilde{k})^1$ gelöst. Ihre Lösungen werden in $\mathcal{O}(-j\,\tilde{k})^0$ eingesetzt und dann die Gleichungen dieser Ordnung gelöst u.s.w. Die Lösung ist asymptotisch für $\tilde{k} \to \infty$.

4.3.2. Die Eikonalgleichung

Aus dem Eikonalsystem ergibt sich eine Gleichung für $\tilde{S}$ allein, die unabhängig von $\underline{P}_0$ und $\underline{\hat{V}}_0$ ist, sowie eine Beziehung zwischen $\underline{P}_0$ und $\underline{\hat{V}}_0$. Auflösen von (4.3.1/6) nach $\underline{\hat{V}}_0$ und Einsetzen in (4.3.1/5) ergibt nach Division durch $\underline{P}_0 \neq 0$ die Eikonalgleichung:

$$\left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} + Ma \, \hat{\underline{v}}_0 \, \text{grad}^* \, \tilde{S} \right)^2 - \hat{c}_0^2 \, |\text{grad}^* \, \tilde{S}|^2 = 0 \qquad (4.3.2/1)$$

Die Lösung der Eikonalgleichung ergibt für $\tilde{S} = 0$ den Phasenverlauf im Raum. Eine Berechnung von $\underline{P}_0$ und $\underline{\hat{V}}_0$ selbst ist erst im zweiten Schritt mit Hilfe der Transportgleichung möglich.

Die neuen Gleichungen (4.2.2/40) und (4.2.2/41) besitzen dieselbe Eikonalgleichung wie BLOKHINTZEV's Gleichungen. Die Eikonalgleichung wurde in der Folgezeit von verschiedenen Autoren auf unterschiedliche Weise hergeleitet und untersucht /u. a. HELLER (1953); KORNHAUSER (1953); KELLER (1954); MORSE & INGARD (1961); UNGINČIUS (1965), (1972); CHESSEL (1973); MEYER & SCHROETER (1981)/.

Auf den ersten Blick ergibt sich durch (4.3.2/1) nicht unbedingt ein Vorteil gegenüber den Ausgangsgleichungen (4.2.2/40), (4.2.2/41) : Statt eines linearen partiellen Differentialgleichungssystems in $\tilde{p}_0$ und $\hat{\underline{v}}_0$ muß nun eine nichtlineare partielle Differentialgleichung gelöst werden. Doch im weiteren wird sich herausstellen, daß es dadurch möglich ist, den Schalldruck zu berechnen, ohne die Schnelle berechnen zu müssen. Die Gleichung (4.3.2/1) läßt sich durch die Charakteristikenmethode nach COURANT & HILBERT (1968) in ein gewöhnliches, numerisch integrierbares Differentialgleichungssystem überführen. Setzt man :

$$H = \frac{1}{2} \cdot \left(\left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} + Ma \, \hat{\underline{v}}_0 \, \text{grad}^* \, \tilde{S} \right)^2 - \hat{c}_0^2 |\text{grad}^* \, \tilde{S}|^2 \right) = 0 \qquad (4.3.2/2)$$

und

$$\hat{\underline{v}}_0 \, (x^*, y^*, z^*) = \left(\hat{u}_0 \, (x^*, y^*, z^*), \hat{v}_0 \, (x^*, y^*, z^*), \right.$$

$$\left. \hat{w}_0 \, (x^*, y^*, z^*) \right)$$

$$p_t = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \tilde{t}} ; \quad p_x = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^*} ; \quad p_y = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial y^*} ; \quad p_z = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial z^*}$$

so ergibt sich:

$$H = \frac{1}{2}\Big(\big(p_t + Ma\,(\hat{u}_0\, p_x + \hat{v}_0\, p_y + \hat{w}_0\, p_z)\big)^2 - \hat{c}_0^2 \big(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \big) \Big) = 0 \qquad (4.3.2/3)$$

Es gilt: $x_i^* = x^*, y^*, z^*, \tilde{t}$; $p_i = p_x, p_y, p_z, p_t$

$$\frac{d\, x_i^*}{d\, \tilde{\tau}} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (4.3.2/4)$$

$$\frac{d\, p_i}{d\, \tilde{\tau}} = - p_i \frac{\partial H}{\partial \tilde{S}} - \frac{\partial H}{\partial x_i^*} \qquad (4.3.2/5)$$

$$\frac{d\, \tilde{S}}{d\, \tilde{\tau}} = p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (4.3.2/6)$$

Die Lösung des Systemes (4.3.2/4) - (4.3.2/6) ergibt die Werte von $\tilde{S}$ und $\frac{\partial \tilde{S}}{\partial x_i^*}$, die hier formal als unabhängige Parameter aufgefaßt werden, entlang den durch (4.3.2/4) und (4.3.2/5) gegebenen Raumkurven, den Charakteristiken. Da $\tilde{S}$ selbst in (4.3.2/2) nicht auftaucht, nimmt (4.3.2/5) die einfachere Form :

$$\frac{d\, p_i}{d\, \tilde{\tau}} = - \frac{\partial H}{\partial x_i^*}$$

an.
Wegen der Zeitunabhängigkeit des Strömungsfeldes $\hat{\vec{v}}_0 \neq \hat{\vec{v}}_0(\tilde{t})$ kann eine einfachere Form für $\tilde{S}$ gefunden werden. (4.3/15) für p_t ergibt :

$$\frac{d\, p_t}{d\, \tilde{\tau}} = 0$$

Integration ergibt:

$$p_t = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \tilde{t}} = \text{konstant} = - 1,$$

sodaß S die einfachere Form

$$\tilde{S} = - \tilde{t} + \tilde{\sigma} (x^*, y^*, z^*) \qquad (4.3.2/7)$$

erhält. Der Phasenfaktor in (4.3.1/1) bzw. (4.3.1/2) nimmt dann die Form einer auslaufenden Welle:

$$e^{j\tilde{k}\left(\tilde{t} - \tilde{\sigma}(x^*, y^*, z^*)\right)}$$

an. Dadurch erhält man für das Eikonalsystem (4.3.1/5) und (4.3.1/6)

$$- \underline{P}_0 + Ma\, \underline{P}_0\, \hat{\vec{v}}_0\, grad^*\, \tilde{\sigma} + \hat{\rho}_0\, \hat{c}_0^2\, \vec{\underline{V}}_0\, grad^*\, \tilde{\sigma} = 0 \qquad (4.3.2/8)$$

$$- \hat{\rho}_0\, \vec{\underline{V}}_0 + Ma\, \hat{\rho}_0\, \vec{\underline{V}}_0\, (\hat{\vec{v}}_0\, grad^*\, \tilde{\sigma}) + \underline{P}_0\, grad^*\, \tilde{\sigma} = 0 \qquad (4.3.2/9)$$

und für H :

$$H = \frac{1}{2}\left((1 - Ma\, \hat{\vec{v}}_0\, grad^*\, \tilde{\sigma})^2 \hat{c}_0^2 |grad^*\, \tilde{\sigma}|^2 \right) = 0 \qquad (4.3.2/10)$$

Die Bedeutung dieser Gleichung soll noch erläutert werden.

Führt man nun dimensionsbehaftete Größen ein, multipliziert mit 2ω und setzt:

$$\omega \frac{c_r}{L_r} \cdot grad\, \tilde{\sigma} = \vec{k}\,(\vec{r}) \qquad (4.3.2/11)$$

so ergibt sich:

$$\left(\omega - \vec{v}_0\,(\vec{r})\, \vec{k}\,(\vec{r})\right)^2 - c^2\, |\vec{k}\,(\vec{r})|^2 = 0\,, \qquad (4.3.2/12)$$

die Dispersionsbeziehung im bewegten Medium. Die Frequenz $\omega_b\,(\vec{r})$ ist:

$$\omega_b\,(\vec{r}) = \omega - \vec{v}_0\,(\vec{r})\, k\,(\vec{r})\,, \qquad (4.3.2/13)$$

d.h. aufgrund des Dopplereffektes ist die Kreisfrequenz ω_b eines mit der lokalen Strömungsgeschwindigkeit mitbewegten Beobachters bei $\vec{v}_0 \uparrow\uparrow \vec{k}$ um $\vec{v}_0 \cdot \vec{k}$ kleiner als die Frequenz des ruhenden Beobachters. In dimensionsloser Schreibweise erhält man:

$$\tilde{\omega}_b\,(\vec{r}^*) = 1 - Ma\, \hat{\vec{v}}_0\, grad^* \tilde{\sigma} \qquad (4.3.2/14)$$

Für die numerische Behandlung ist es günstiger, die Eikonalgleichung in der folgenden, von CHESSEL (1973) angegebenen Form zu untersuchen :

$$G=\hat{c}_0\,|\mathrm{grad}^*\,\tilde{\sigma}| + Ma\,\hat{\vec{v}}_0\,\mathrm{grad}^*\,\tilde{\sigma} - 1 = 0 \qquad (4.3.2/15)$$

Die charakteristischen Gleichungen ergeben sich aus (4.3.2/4) - (4.3.2/6) mit (4.3.2/15) statt (4.3.2/1o) zu

$$\frac{d\,x^*}{d\,\tilde{\tau}} = \frac{\hat{c}_0\,p_x}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}} + Ma\,\hat{u}_0 \qquad (4.3.2/16)$$

$$\frac{d\,y^*}{d\,\tilde{\tau}} = \frac{\hat{c}_0\,p_y}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}} + Ma\,\hat{v}_0 \qquad (4.3.2/17)$$

$$\frac{d\,z^*}{d\,\tilde{\tau}} = \frac{\hat{c}_0\,p_z}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}} + Ma\,\hat{w}_0 \qquad (4.3.2/18)$$

$$\frac{d\,p_x}{d\,\tilde{\tau}} = -\,Ma\left(\frac{\partial\,\hat{u}_0}{\partial\,x^*}\,p_x + \frac{\partial\,\hat{v}_0}{\partial\,x^*}\,p_y + \frac{\partial\,\hat{w}_0}{\partial\,x^*}\,p_z\right) - \frac{\partial\,\hat{c}_0}{\partial x^*}\sqrt{p_x^2+p_y^2+p_z^2} \qquad (4.3.2/19)$$

$$\frac{d\,p_y}{d\,\tilde{\tau}} = -\,Ma\left(\frac{\partial\,\hat{u}_0}{\partial\,y^*}\,p_x + \frac{\partial\,\hat{v}_0}{\partial\,y^*}\,p_y + \frac{\partial\,\hat{w}_0}{\partial\,y^*}\,p_z\right) - \frac{\partial\,\hat{c}_0}{\partial y^*}\sqrt{p_x^2+p_y^2+p_z^2} \qquad (4.3.2/2o)$$

$$\frac{d\,p_z}{d\,\tilde{\tau}} = -\,Ma\left(\frac{\partial\,\hat{u}_0}{\partial\,z^*}\,p_x + \frac{\partial\,\hat{v}_0}{\partial\,z^*}\,p_y + \frac{\partial\,\hat{w}_0}{\partial\,z^*}\,p_z\right) - \frac{\partial\,\hat{c}_0}{\partial z^*}\sqrt{p_x^2+p_y^2+p_z^2} \qquad (4.3.2/21)$$

In dieser Form treten auf der rechten Seite nur Koeffizienten bis $\mathcal{O}(Ma)$ auf. Dagegen ergeben sich bei direkter Verwendung von (4.3.2/1o) Koeffizienten bis $\mathcal{O}(Ma^2)$, was für die hier betrachteten niedrigen Mach-Zahlen leicht zu Schwierigkeiten bei der numerischen Integration führt.

Die Gleichungen (4.3.2/19) - (4.3.2/21) beschreiben die Brechung des Wellenvektors $\vec{k}$ längs der durch (4.3.2/16) - (4.3.2/18) gegebenen Raumkurven.

Die jeweils ersten Terme in (4.3.2/19) - (4.3.2/21) beschreiben die Brechung durch die inhomogenen und anisotropen Eigenschaften des Strömungsfeldes; die letzten Terme die durch das Temperaturfeld hervorgerufene Brechung infolge der Änderung der Schallgeschwindigkeit.

Die Gleichungen (4.3.2/16) - (4.3.2/21) bilden ein nichtlineares gewöhnliches Differentialgleichungssystem in den Unbekannten x^*, y^*, z^*, p_x, p_y und p_z und mit den ortsabhängigen Koeffizienten $\hat{u}_0$, $\hat{v}_0$, $\hat{w}_0$ und deren Ableitungen nach den 3 Ortskoordinaten. Die ortsabhängigen Koeffizienten sind nach Lösung von (4.1.3/3) bekannt. Für die numerische Lösung eines gewöhnlichen Differentialgleichungssystems stehen Standardmethoden zur Verfügung. Später wird auf ein Prädiktor-Korrektor-Verfahren eingegangen.

Die Gleichung für p_t taucht in dieser Darstellung nicht mehr auf. Im weiteren wird die Position der Phasenebene entlang der durch (4.3.2/16) - (4.3.2/21) definierten Raumkurven nicht mehr benötigt, weil in den Transportgleichungen, aus denen $\underline{P}_0$ berechnet wird, $\tilde{S}$ selbst nicht auftritt. Aus diesem Grunde erübrigt sich auch die Gleichung (4.3.2/6), die ebenfalls weggelassen wird.

Welche physikalische Bedeutung hat $\tilde{\tau}$?
In der Form des kanonischen Systemes (4.3.2/16) - (4.3.2/21) ist nun die Bedeutung der unabhängigen Variablen $\tilde{\tau}$, des Kurvenparameters der Charakteristiken nicht unmittelbar ersichtlich.

Quadriert man (4.3.2/16) - (4.3.2/18) und addiert die drei Gleichungen und zieht die Wurzel, so erhält man

$$d\tilde{\tau} = \frac{\sqrt{(dx^*)^2 + (dy^*)^2 + (dz^*)^2}}{\left| \hat{c}_0 \frac{\operatorname{grad}^* \tilde{\sigma}}{|\operatorname{grad}^* \tilde{\sigma}|} + Ma\, \hat{\vec{v}}_0 \right|}$$

oder mit der dimensionslosen Bogenlänge s^* :

$$ds^* = \sqrt{(dx^*)^2 + (dy^*)^2 + (dz^*)^2}$$

$$d\tilde{\tau} = \frac{ds^*}{\left| \hat{c}_0 \frac{\operatorname{grad}^* \tilde{\sigma}}{|\operatorname{grad}^* \tilde{\sigma}|} + Ma\, \hat{\vec{v}}_0 \right|} \qquad (4.3.2/22)$$

Der Nenner in (4.3.2/22) ist der Betrag der dimensionslosen Gruppengeschwindigkeit. Aus (4.3.2/12) kann

$$\vec{v}_{gr} = \frac{\partial \omega}{\partial k_x} , \frac{\partial \omega}{\partial k_y} , \frac{\partial \omega}{\partial k_z}$$

ausgerechnet und die Gruppengeschwindigkeit auch in dimensionsbehafteter Schreibweise gewonnen werden.

Für das von THOMPSON (1972), (1974a), (1974b) untersuchte geschichtete Strömungsfeld konstanter Temperatur ist eine Lösung von (4.3.2/19) - (4.3.2/2o) nicht erforderlich. In diesem Falle ist $\hat{u}_0 = \hat{u}_0(z^*)$, $\hat{v}_0 = \hat{v}_0(z^*)$, $\hat{w}_0 = 0$, sodaß die rechte Seite von (4.3.2/19) und (4.3.2/2o) jeweils gleich null wird. In (4.3.2/16), (4.3.2/17) und (4.3.2/21) kann dann $d\tilde{\tau}$ mit Hilfe von (4.3.2/18) durch dz^* substituiert werden. Weil die rechte Seite der Gleichungen dann nur noch von z^* abhängt, lassen sie sich getrennt, für einfache Verläufe von $\hat{u}_0(z^*)$ und $\hat{w}_0(z^*)$ sogar analytisch integrieren, wie von THOMPSON in etwas komplizierter Darstellung vorgeschlagen.

Welche Änderungen ergeben sich nun für die Transportgleichung ?

4.3.3 Die Transportgleichung

Durch Lösen des Eikonalsystems (4.3.1/5) - (4.3.1/6) wurden die Charakteristiken bestimmt und die örtlichen Ableitungen von $\tilde{S}$ bzw. $\tilde{\sigma}$ und damit die Frequenz des bewegten Beobachters $(1 - Ma\ \hat{\vec{v}}(\vec{r}^*)\ grad^*\ \tilde{\sigma})$ und der Wellenvektor $grad^*\ \tilde{\sigma}$. Nun ist es möglich, auch den Schalldruck durch Lösen der Transportgleichungen (4.3.1/7) und (4.3.1/8) für $\underline{P}_0$ zu approximieren. Mit Hilfe von (4.3.2/7) kann das Transportsystem in folgender Form geschrieben werden:

$$- \underline{P}_1 + Ma\ \underline{P}_1\ \hat{\vec{v}}_0\ grad^*\tilde{\sigma} + \hat{c}_0^2\hat{\rho}_0\ \underline{\vec{V}}_1\ grad^*\ \tilde{\sigma}$$

$$+ Ma\ \hat{\vec{v}}_0\ grad^*\ \underline{P}_0 + \hat{c}_0^2\hat{\rho}_0 div^*\ \underline{\vec{V}}_0 = 0 \qquad (4.3.3/1)$$

$$- \hat{\rho}_0\ \underline{\vec{V}}_1 + Ma\ \hat{\rho}_0\ \underline{\vec{V}}_1\ (\hat{\vec{v}}_0\ grad^*\ \tilde{\sigma}) + \underline{P}_1\ grad^*\ \tilde{\sigma}$$

$$+ Ma\ \hat{\rho}_0 \left(\left(\hat{\vec{v}}_0 \cdot grad^* \right) \underline{\vec{V}}_0 + \left(\underline{\vec{V}}_0 \cdot grad^* \right) \hat{\vec{v}}_0 \right) + grad^*\ \underline{P}_0 = 0 \qquad (4.3.3/2)$$

Die jeweils 1. Zeile jeder der obigen Gleichungen ist mit dem Eikonalsystem gleich, bis auf die Tatsache, daß hier $\underline{P}_0$ und $\underline{\vec{V}}_0$ anstelle von $\underline{P}_1$ und $\underline{\vec{V}}_1$ in (4.3.1/5) - (4.3.1/6) auftreten. Im vorigen Kapitel konnte gezeigt werden, daß das Eikonalsystem unabhängig von $\underline{P}_0$ und $\underline{\vec{V}}_0$ durch Lösung der Eikonalgleichung in der Form (4.3.2/1o) bzw. (4.3.2/15) erfüllt ist. Daher sind auch die ersten beiden Zeilen von (4.3.3/1) bzw. (4.3.3/2) im Einflußbereich der Charakteristiken durch die Eikonalgleichung erfüllt. Sie sind gleich null. In den Transportgleichungen bleibt demnach:

$$Ma\ \frac{\hat{\vec{v}}_0}{\hat{c}_0}\ grad^*\ \underline{P}_0 + \hat{\rho}_0\ div^*\ \underline{\vec{V}}_0 = 0 \qquad (4.3.3/3)$$

$$Ma\ \hat{\rho}_0 \left(\left(\hat{\vec{v}}_0 \cdot grad^* \right) \underline{\vec{V}}_0 + \left(\underline{\vec{V}}_0 \cdot grad^* \right) \hat{\vec{v}}_0 \right) + grad^*\ \underline{P}_0 = 0 \qquad (4.3.3/4)$$

zu erfüllen. Die Lösung dieser Gleichungen liefert eine Approximation für den Schalldruck $\underline{P}_0$. An dieser Stelle erweisen sich die im Kapitel (4.2.3) abgeleiteten Energiebeziehungen als nützlich. Die Gleichungen (4.3.3/3) und (4.3.3/4) stimmen mit den Anteilen von (4.2.2/43) und (4.2.2/44) überein, die keine Ableitungen nach $\tilde{t}$ enthalten. Es kann daher analog zu Kapitel 4.2.3 vorgegangen werden. Lediglich der komplexe Charakter von $\underline{P}_0$ und $\underline{\vec{V}}_0$ erfor-

dert eine geringfügige Änderung des Vorgehens:

Im Kapitel 4.2.3 wurde die Gleichung (4.2.2/40), die (4.3.3/1) entspricht, mit (4.2.3/5) multipliziert, ebenso (4.2.2/41) mit (4.2.3/6), und beide Ergebnisse addiert. Hier wird stattdessen mit Hilfe von (4.3.3/3) und (4.3.3/4) und dem Konjugiert-Komplexen der Gleichungen der zeitliche Mittelwert der Intensität gebildet:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\left(\frac{\overline{\underline{P}}_0}{\hat{\rho}_0} + \mathrm{Ma}\,\hat{\underline{v}}_0\overline{\underline{\hat{v}}}_0\right)\cdot\left(\mathrm{Ma}\,\frac{\hat{\underline{v}}_0}{\hat{c}_0^2}\mathrm{grad}^*\,\underline{P}_0 + \hat{\rho}_0\,\mathrm{div}^*\,\overline{\underline{\hat{v}}}_0\right) + \\
&\frac{1}{4}\left(\frac{\underline{P}_0}{\hat{\rho}_0} + \mathrm{Ma}\,\hat{\underline{v}}_0\,\overline{\underline{\hat{v}}}_0\right)\cdot\left(\mathrm{Ma}\,\frac{\hat{\underline{v}}_0}{\hat{c}_0^2}\,\mathrm{grad}^*\,\overline{\underline{P}}_0 + \hat{\rho}_0\,\mathrm{div}^*\,\overline{\underline{\hat{v}}}_0\right) + \\
&\frac{1}{4}\left(\overline{\underline{\hat{v}}}_0 + \mathrm{Ma}\,\frac{\overline{\underline{P}}_0\,\hat{\underline{v}}_0}{\hat{\rho}_0\,\hat{c}_0^2}\right)\cdot\left(\mathrm{Ma}\,\hat{\rho}_0\left(\left(\hat{\underline{v}}_0\cdot\mathrm{grad}^*\right)\overline{\underline{\hat{v}}}_0 + \left(\overline{\underline{\hat{v}}}_0\cdot\mathrm{grad}^*\right)\hat{\underline{v}}_0\right)\right. \\
&\qquad\left. + \mathrm{grad}^*\,\underline{P}_0\right) \\
&+\frac{1}{4}\left(\overline{\underline{\hat{v}}}_0 + \mathrm{Ma}\,\frac{\underline{P}_0\,\hat{\underline{v}}_0}{\hat{\rho}_0\hat{c}_0^2}\right)\cdot\left(\mathrm{Ma}\,\hat{\rho}_0\left(\left(\hat{\underline{v}}_0\cdot\mathrm{grad}^*\right)\overline{\underline{\hat{v}}}_0 + \left(\overline{\underline{\hat{v}}}_0\cdot\mathrm{grad}^*\right)\hat{\underline{v}}_0\right)\right. \\
&\qquad\left. + \mathrm{grad}^*\,\overline{\underline{P}}_0\right) = 0 \qquad (4.3.3/5)
\end{aligned}$$

Überstrichung kennzeichnet hier konjugiert-komplexe Größen. Durch Ausmultiplikation und Umordnen der Gleichung wie in Kapitel 4.2.3 beschrieben kann die folgende Gleichung gewonnen werden:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\,\mathrm{div}^*\left(\left(\overline{\underline{P}}_0 + \mathrm{Ma}\,\hat{\rho}_0\,\hat{\underline{v}}_0\,\overline{\underline{\hat{v}}}_0\right)\cdot\left(\overline{\underline{\hat{v}}}_0 + \mathrm{Ma}\,\frac{\underline{P}_0}{\hat{\rho}_0\,\hat{c}_0^2}\,\hat{\underline{v}}_0\right) + \right. \\
&\qquad\left.\left(\underline{P}_0 + \mathrm{Ma}\,\hat{\rho}_0\,\hat{\underline{v}}_0\,\overline{\underline{\hat{v}}}_0\right)\cdot\left(\overline{\underline{\hat{v}}}_0 + \mathrm{Ma}\,\frac{\overline{\underline{P}}_0}{\hat{\rho}_0\,\hat{c}_0^2}\,\hat{\underline{v}}_0\right)\right) \\
&-\frac{1}{4}\,\mathrm{Ma}\,\overline{\underline{\hat{v}}}_0\cdot\left(\left(\overline{\underline{\hat{v}}}_0\,\hat{\underline{v}}_0\right)\mathrm{grad}^*\,\hat{\rho}_0 + \hat{\rho}_0\,\hat{\underline{v}}_0\times\mathrm{rot}^*\,\overline{\underline{\hat{v}}}_0 - \right. \\
&\qquad\left.\mathrm{Ma}\,\frac{\overline{\underline{P}}_0}{\hat{c}_0^2}\,\hat{\underline{v}}_0\times\mathrm{rot}^*\,\hat{\underline{v}}_0\right) \\
&-\frac{1}{4}\,\mathrm{Ma}\,\overline{\underline{\hat{v}}}_0\cdot\left(\left(\underline{\hat{v}}_0\,\hat{\underline{v}}_0\right)\mathrm{grad}^*\,\hat{\rho}_0 + \hat{\rho}_0\,\hat{\underline{v}}_0\times\mathrm{rot}^*\,\underline{\hat{v}}_0 - \right. \\
&\qquad\left.\mathrm{Ma}\,\frac{\underline{P}_0}{\hat{c}_0^2}\,\hat{\underline{v}}_0\times\mathrm{rot}^*\,\hat{\underline{v}}_0\right) = 0 \qquad (4.3.3/6)
\end{aligned}$$

Aus Gleichung (4.3.2/9) gewinnt man:

$$\underset{\rightarrow}{V}_0 = \frac{\underline{P}_0 \ \text{grad}^* \ \tilde{\sigma}}{\hat{\rho}_0 \ (1 - \text{Ma} \ \overset{\wedge}{\underset{\rightarrow}{v}}_0 \ \text{grad}^* \ \tilde{\sigma})} \qquad (4.3.3/7)$$

bzw. mit (4.3.2/1o)

$$\underset{\rightarrow}{V}_0 = \frac{\underline{P}_0}{\hat{\rho}_0 \hat{c}_0} \frac{\text{grad}^* \tilde{\sigma}}{|\text{grad}^* \tilde{\sigma}|} \qquad (4.3.3/8)$$

Wird nun (4.3.3/8) und das Konjugiert-Komplexe dieses Ausdrucks in (4.3.3/6) eingesetzt, so erhält man die Transportgleichung für den Schalldruck in der Form:

$$\begin{aligned} \text{div}^* \Bigg(& \frac{|\underline{P}_0|^2}{\hat{\rho}_0 \hat{c}_0^2} \left(1 + \text{Ma} \ \frac{\overset{\wedge}{\underset{\rightarrow}{v}}_0}{\hat{c}_0} \frac{\text{grad}^* \tilde{\sigma}}{|\text{grad}^* \tilde{\sigma}|}\right) \cdot \left(\frac{\hat{c}_0 \ \text{grad}^* \ \tilde{\sigma}}{|\text{grad}^* \ \tilde{\sigma}|} + \text{Ma} \ \overset{\wedge}{\underset{\rightarrow}{v}}_0\right) \Bigg) \\ & - \frac{1}{2} \ \text{Ma} \ \frac{\text{grad}^* \ \tilde{\sigma}}{\hat{c}_0 \ |\text{grad}^* \tilde{\sigma}|} \cdot \left(\overset{\wedge}{\underset{\rightarrow}{v}}_0 \times \left(\left(\text{grad}^* \ \frac{|\underline{P}_0|^2}{\hat{\rho}_0 \hat{c}_0} \right) \times \frac{\text{grad}^* \tilde{\sigma}}{|\text{grad}^* \tilde{\sigma}|} \right) \right) \\ & - \text{Ma} \ \frac{|\underline{P}_0|^2}{\hat{\rho}_0 \hat{c}_0^2} \ \frac{\text{grad}^* \ \tilde{\sigma}}{|\text{grad}^* \tilde{\sigma}|} \cdot \left(\overset{\wedge}{\underset{\rightarrow}{v}}_0 \times \text{rot}^* \left(\frac{\text{grad}^* \tilde{\sigma}}{|\text{grad}^* \tilde{\sigma}|} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\left(\overset{\wedge}{\underset{\rightarrow}{v}}_0 \cdot \text{grad}^* \ \tilde{\sigma}\right)}{|\text{grad}^* \ \tilde{\sigma}|} \cdot \text{grad}^* \ \hat{\rho}_0 \right. \\ & \left. + \frac{\text{Ma}}{\hat{c}_0} \left(\overset{\wedge}{\underset{\rightarrow}{v}}_0 \times \text{rot}^* \ \overset{\wedge}{\underset{\rightarrow}{v}}_0 \right) \right) = 0 \end{aligned} \qquad (4.3.3/9)$$

In dieser Gleichung treten neben der unbekannten Schalldruckamplitude $|\underline{P}_0|^2$ nur die aus der Lösung der Strömungsfeldgleichung und der Eikonalgleichung bekannten Koeffizienten $\hat{\rho}_0$, $\hat{c}_0$, $\text{grad}^* \sigma$ und $\overset{\wedge}{\underset{\rightarrow}{v}}_0$ auf. Ferner ist die Gleichung linear in $|\underline{P}_0|^2$ und von 1. Ordnung.

Die Transportgleichung nimmt eine einfachere Form an, wenn statt $|\underline{P}_0|^2$ eine verallgemeinerte Größe, die in der Literatur als "wave-action" bezeichnet wird, auf folgende Weise eingeführt wird: Die wave-action $\tilde{W}$ wird in dimensionsloser Schreibweise als

$$\tilde{W} = \frac{|\underline{P}_0|^2}{\hat{\rho}_0 \ \hat{c}_0^2} \left(1 + \text{Ma} \ \frac{\overset{\wedge}{\underset{\rightarrow}{v}}_0}{\hat{c}_0} \frac{\text{grad}^* \tilde{\sigma}}{|\text{grad}^* \tilde{\sigma}|}\right) \qquad (4.3.3/1o)$$

definiert.

Mit Hilfe von (4.3.2/1o) erhält man:

$$1 + Ma \frac{\hat{\vec{v}}_0 \; grad^* \tilde{\sigma}}{\hat{c}_0 \; |grad^* \tilde{\sigma}|} = \frac{1}{1 - Ma \; \hat{\vec{v}}_0 \; grad^* \tilde{\sigma}} = \frac{1}{\hat{c}_0 |grad^* \tilde{\sigma}|} \qquad (4.3.3/11)$$

Wie aus (4.3.2/14) hervorgeht ist der Ausdruck

$$(1 - Ma \; \hat{\vec{v}}_0 \; grad^* \; \tilde{\sigma}) = \tilde{\omega}_b \qquad (4.3.3/12)$$

die dimensionslose Frequenz, die der mit der lokalen Geschwindigkeit des Strömungsfeldes mitbewegte Beobachter mißt, so daß (4.3.3/1o) die äquivalente Form

$$\tilde{W} = \frac{|\underline{P}_0|^2}{\hat{\rho}_0 \; \hat{c}_0^2 \; \tilde{\omega}_b} \qquad (4.3.3/13)$$

annimmt. Da die Strömungsgeschwindigkeit des Feldes und der Wellenvektor überall bekannt sind, kann aus der "wave-action" mit Hilfe von (4.3.2/14) leicht $|\underline{P}_0|^2$ berechnet werden. Mit Hilfe von (4.3.3/1o), (4.2.2/37) und (4.2.2/23) kann (4.3.3/9) als Transportgleichung für die "wave-action" geschrieben werden

$$\begin{aligned} & div^* \left(\tilde{W} \left(\frac{\hat{c}_0 \; grad^* \; \tilde{\sigma}}{|grad^* \; \tilde{\sigma}|} + Ma \; \hat{\vec{v}}_0 \right) \right) \\ & + (grad^* \; \tilde{W}) \; \frac{\hat{c}_0}{2} \; |grad^* \sigma| \; Ma \left(\hat{\vec{v}}_0 - \frac{grad^* \tilde{\sigma}}{|grad^* \tilde{\sigma}|} \left(\hat{\vec{v}}_0 \frac{grad^* \tilde{\sigma}}{|grad^* \tilde{\sigma}|} \right) \right) \\ & + \tilde{W} \; grad^* \; \tilde{\sigma} \left(Ma \; \hat{\vec{v}}_0 \times rot^* \; (Ma \; \hat{\vec{v}}_0) \right) = 0 \end{aligned} \qquad (4.3.3/14)$$

Es soll nun ein Sonderfall betrachtet werden, die Ausbreitung in Richtung des Strömungsfeldes ($\hat{\vec{v}}_0 \; || \; grad^* \; \sigma$). In diesem Falle erhält man aus (4.3.3/14)

$$div^* \left(\tilde{W} \left(\frac{\hat{c}_0 \; grad^* \sigma}{|grad^* \; \sigma|} + Ma \; \hat{\vec{v}}_0 \right) \right) \qquad (4.3.3/15)$$

Die Eigenschaften von (4.3.3/15) wurden in dieser oder ähnlicher Form von verschiedenen Autoren diskutiert /BLOKHINTZEV (1946a), (1946b); HAYES (1968); BRETHERTON & GARRETT (1969); MORFEY (1971); WHITHAM (1974); LIGHTHILL (1978)/.

Der in (4.3.3/15) enthaltene dimensionslose Gruppengeschwindigkeitsvektor

$$\frac{\hat{c}_0 \, \text{grad}^* \, \tilde{\sigma}}{|\text{grad}^* \, \tilde{\sigma}|} + \text{Ma} \, \hat{\vec{v}}_0$$

weist in Richtung der Charakteristiken der Eikonalgleichung (4.3.2/16) - (4.3.2/18). Wird nun der Gauß'sche Integralsatz auf (4.3.3/15) angewandt, so ergibt sich der Erhaltungssatz für die "wave-action". Er besagt, daß die "wave-action" innerhalb einer von den Charakteristiken der Eikonalgleichung gebildeten Röhre erhalten bleibt.

MORFEY (1971) hat darauf verwiesen, daß beim Erhaltungssatz für die "wave-action" der Rotationsanteil des Strömungsgeschwindigkeitsfeldes und die Geschwindigkeitskomponente tangential zur Wellenfront unberücksichtigt bleiben.

Da das Strömungsfeld in der Oberflächenschicht der Atmosphäre, wie in Kapitel 2 gezeigt, immer drehbehaftet ist, ist eine Anwendung des Satzes von der Erhaltung der "wave-action" zur Berechnung des Schalldruckes - wie oben gezeigt - nur für den Sonderfall der Ausbreitung in Richtung des Strömungsfeldes anwendbar. Der Schalldruck kann im Gegensatz zu THOMPSON's Vorschlag /(1974a), (1974b)/ außer im oben genannten Sonderfall nicht aus den Charakteristiken der Eikonalgleichung berechnet werden. Der Grund hierfür liegt darin, daß - anders als im ruhenden Medium - im hier betrachteten Falle die Charakteristiken der Eikonal- und Transportgleichung nicht identisch sind. $|\underline{P}_0|^2$ muß vielmehr aus der Lösung der Differentialgleichung (4.3.3/14) für $\tilde{W}$ gewonnen werden.

Eine notwendige Bedingung für die Existenz dieser Lösung ist, daß das betrachtete Gebiet im Einflußbereich der Charakteristiken der Eikonalgleichung liegt, so daß $\text{grad}^* \tilde{\sigma}$ dort berechnet werden kann.

(4.3.3/14) kann auch folgender Form geschrieben werden:

$$\tilde{\vec{G}} \, \text{grad}^* \, \tilde{W} + \tilde{D} \cdot \tilde{W} = 0 \qquad (4.3.3/16)$$

mit den aus der Lösung der Eikonalgleichung bekannten Koeffizienten:

$$\tilde{\vec{G}} = (\tilde{G}_x, \tilde{G}_y, \tilde{G}_z)$$

$$\tilde{G}_x = \frac{\hat{c}_0\, p_x}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}} + Ma \cdot \left(\hat{u}_0 \left(1 + \frac{\hat{c}_0}{2} \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}\right) - \frac{\hat{c}_0}{2} \frac{p_x}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}} \left(\hat{u}_0\, p_x + \hat{v}_0\, p_y + \hat{w}_0\, p_z\right)\right)$$

$$\tilde{G}_y = \frac{\hat{c}_0\, p_y}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}} + Ma \cdot \left(\hat{v}_0 \left(1 + \frac{\hat{c}_0}{2} \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}\right) - \frac{\hat{c}_0}{2} \frac{p_y}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}} \left(\hat{u}_0\, p_x + \hat{v}_0\, p_y + \hat{w}_0\, p_z\right)\right)$$

$$\tilde{G}_z = \frac{\hat{c}_0 p_z}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}} + Ma \cdot \left(\hat{w}_0 \left(1 + \frac{\hat{c}_0}{2} \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}\right) - \frac{\hat{c}_0}{2} \frac{p_z}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}} \left(\hat{u}_0\, p_x + \hat{v}_0\, p_y + \hat{w}_0\, p_z\right)\right)$$

(4.3.3/17)

$$\tilde{D} = \tilde{D}_1 + \tilde{D}_2$$

$$\tilde{D}_1 = \frac{\partial}{\partial x^*} \left(\frac{\hat{c}_0\, p_x}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\frac{\hat{c}_0 p_y}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\frac{\hat{c}_0 p_z}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}} \right)$$

(4.3.3/18)

$$\tilde{D}_2 = Ma^2 \left(p_x \left(\hat{v}_0 \left(\frac{\partial\, \hat{v}_0}{\partial\, x^*} - \frac{\partial\, \hat{u}_0}{\partial\, y^*} \right) - \hat{w}_0 \left(\frac{\partial\, \hat{u}_0}{\partial\, z^*} - \frac{\partial\, \hat{w}_0}{\partial\, x^*} \right) \right) + p_y \left(\hat{w}_0 \left(\frac{\partial\, \hat{w}_0}{\partial\, y^*} - \frac{\partial\, \hat{v}_0}{\partial\, z^*} \right) - \hat{u}_0 \left(\frac{\partial\, \hat{v}_0}{\partial\, x^*} - \frac{\partial\, \hat{u}_0}{\partial\, y^*} \right) \right) + p_z \left(\hat{u}_0 \left(\frac{\partial\, \hat{u}_0}{\partial\, z^*} - \frac{\partial\, \hat{w}_0}{\partial\, x^*} \right) - \hat{v}_0 \left(\frac{\partial\, \hat{w}_0}{\partial\, y^*} - \frac{\partial\, \hat{v}_0}{\partial\, z^*} \right) \right) \right)$$

(4.3.3/19)

Die Gleichung (4.3.3/16) ist von gleichem Typ wie die Gleichung (4.1.3/4) und kann daher auch mit Hilfe des Charakteristikenverfahrens gelöst werden. Die charakteristischen Gleichungen lauten:

$$\frac{d\,x^*}{d\,\tilde{\tau}} = G_x \qquad (4.3.3/2o)$$

$$\frac{d\,y^*}{d\,\tilde{\tau}} = G_y \qquad (4.3.3/21)$$

$$\frac{d\,z^*}{d\,\tilde{\tau}} = G_z \qquad (4.3.3/22)$$

Die Gleichungen (4.3.3/2o) - (4.3.3/22) beschreiben den Energietransport der akustischen Welle in Abhängigkeit von Temperatur- und Strömungsgeschwindigkeitseinflüssen. Entlang den durch (4.3.3/2o) - (4.3.3/22) gegebenen Kurven ergibt sich die "wave-action" dann aus

$$\tilde{W}(\tilde{\tau}_1{}^*) = \tilde{W}_o(\tilde{\tau}_o{}^*) \cdot \exp\left(-\int_{\tilde{\tau}_o{}^*}^{\tilde{\tau}_1{}^*} B\,(\tilde{\tau}^*)\,d\tilde{\tau}^*\right)$$

Durch die Wechselwirkung der akustischen Welle mit der Strömung sind die Charakteristiken von Eikonal- und Transportgleichung im Unterschied zur Schallausbreitung im ruhenden Medium nicht identisch. Selbstverständlich ist die Lösung der Eikonalgleichung und der Transportgleichung nur im gemeinsamen Einflußgebiet der durch (4.3.2/16) - (4.3.2/21) und (4.3.3/2o) - (4.3.3/22) definierten Raumkurven sinnvoll.

Für die Lösung von (4.3.3/2o) - (4.3.3/22) kann das gleiche numerische Verfahren (z. B. Prädiktor- Korrektor- Verfahren nach Anhang 1) verwendet werden. Wegen des linearen Charakters von (4.3.3/14) ergibt sich sogar die Vereinfachung, daß in den charakteristischen Gleichungen (4.3.3/2o) - (4.3.3/22) die Ableitungen von $|\underline{P}_o|^2$ nicht als eigenständige Größen auftreten. In dem Fall, daß der normierte Wellenvektor grad* $\tilde{\sigma}$ nicht in Richtung des Strömungsfeldes verläuft, ist es jedoch notwendig, die Eikonalgleichung häufig zu lösen, weil die Charakteristiken dieser Gleichung nicht mit denen der Transportgleichung identisch sind. In diesem Fall muß von der allgemeinsten Definition der Schallstrahlen als Charakteristiken der Transportgleichung ausgegangen werden.

Die Schallstrahlen sind die durch (4.3.3/2o) - (4.3.3/22) gegebenen Kurven. Sie beschreiben die Brechung der "wave-action" durch ein nichtkonstantes drehbehaftetes Geschwindigkeitsfeld nichtkonstanter Temperatur. Der Vergleich mit den Charakteristiken der Eikonalgleichung (4.3.2/16) - (4.3.2/18) zeigt, daß der Einfluß des Rotationsanteiles des Feldes von der gleichen Größenordnung (Ma) ist, wie der des nicht drehbehafteten Anteiles. Er kann also außer für den Sonderfall $\mathrm{grad}^{*}\sigma \,||\, \vec{v}_0$ nicht vernachlässigt werden. Die Terme D_1 und D_2 stellen Dämpfungen (oder Verstärkungen) der "wave-action" entlang dem Schallstrahlen dar. Dabei ist D_1 die Ausbreitungsdämpfung und D_2 die Dämpfung ($D_2>0$) oder Verstärkung ($D_2<0$) durch Wechselwirkung mit dem Rotationsanteil des Strömungsfeldes. In Fällen überwiegender Ausbreitungsdämpfung ist eine Approximation der "wave-action" bis $\mathcal{O}(\mathrm{Ma})$ ausreichend, so daß D_2 nicht berücksichtigt werden muß.

4.3.4 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde gezeigt, wie die geometrische Akustik auf die Schallausbreitung in einem drehbehafteten Geschwindigkeitsfeld nichtkonstanter Temperatur erweitert werden kann. Die hier vorgeschlagene Form der geometrisch-akustischen Gleichungen im Gegensatz zu anderen ist konsistent mit der von MORFEY vorgeschlagenen verallgemeinerten Energiebeziehung, die inzwischen allgemein akzeptiert wird. Die Eikonalgleichung (4.3.2/1o) beschreibt dabei den Einfluß auf den Wellenvektor und die Transportgleichung (4.3.3/14) den Einfluß auf die wave-action, die verallgemeinerte akustische Energiedichte für ebene Wellen. Die hier hergeleiteten Gleichungen approximieren u. a. die Wellenausbreitung im mittleren Strömungsfeld der Atmosphäre, wenn die Wellenlänge klein gegenüber der charakteristischen Längenskala des Strömungsfeldes ist.

Der Vorteil der geometrischen Akustik liegt darin, daß sich die Wellenausbreitung unter komplizierten Bedingungen auf eine Reihe von kanonischen Problemen (Brechung, Reflexion, Beugung) zurückführen läßt, deren Lösungen für ruhendes Medium bereits bekannt sind /KOUYOUMIJAN (1975), SCHROTT (1977)/. Bei der hier untersuchten Aufgabenstellung hat sich gezeigt, daß die Charakteristiken der Eikonalgleichung nicht mit denen der Transportgleichung identisch sind. Es bleibt daher auch die "wave-action" entlang den Charakteristiken der Eikonalgleichung nicht erhalten, wie von einigen Autoren vorgeschlagen, so daß die Vorteile der geometrischen Akustik nicht mehr so deutlich sind. Zur Berechnung der "wave-action" oder des Schalldrucks muß zunächst die Eikonalgleichung gelöst werden, um den ortsabhängigen Wellenvektor zu erhalten. Daraus können erst im zweiten Schritt die Charakteristiken der Transportgleichung und daraus dann der Schalldruck gewonnen werden. Aber auch unter den Bedingungen der Wechselwirkung der akustischen Welle mit einem drehbehafteten Strömungsfeld ist es nach wie vor möglich, ray-tracing anzuwenden. Statt der vier komplexen Größen $\underline{P}_0$, $\underline{\vec{V}}_0$ brauchen hier lediglich die vier reellen Größen $\mathrm{grad}^* \tilde{\sigma}$ und $|\underline{P}_0|^2$ berechnet zu werden.

Die Gleichungen (4.3.2/1o) und (4.3.3/14) sind gültig außerhalb von Begrenzungsflächen, an denen zusätzliche Randbedingungen für den Schalldruck oder die Normalkomponente der Schnelle oder das

Verhältnis der beiden Größen erfüllt werden müssen. Die Begrenzungsflächen sind Kaustiken für die Schallausbreitung, an denen die klassische geometrische Akustik versagt. Der Bereich der Kaustiken ist aber relativ klein und im ruhenden Medium auf ca 6 λ begrenzt /BUCHAL & KELLER (196o)/. Die dimensionslose skalierte Form der Gleichungen erlaubt es, die Größenordnung der Fehler für die geometrisch-akustischen Gleichungen (4.3.2/15) und (4.3.3/16) abzuschätzen. Die asymptotische Lösung der Strömungsfeldgleichungen nimmt Fehler in der $\mathcal{O}(Ma^2)$ in Kauf. Die Rückwirkung der akustischen Größen auf die Strömungsfeldgrößen in dem durch Bild 4/1 gegebenen Gültigkeitsbereich liegt in $\mathcal{O}(\delta)$. Damit ist die Koeffizientengenauigkeit der Strömungsfeldkoeffizienten in den akustischen Gleichungen ebenfalls in dieser Größenordnung. Die Lösung nach der Methode der geometrischen Akustik beinhaltet einen Fehler durch die Vernachlässigung der Transportgleichung höherer Ordnung. Wird nur die Transportgleichung erster Ordnung berücksichtigt, so liegt der Fehler in $\mathcal{O}(1/\tilde{k})$. Der Gesamtfehler der Approximation liegt daher in der Größenordnung $(\delta + Ma^2 + 1/\tilde{k})$.

Die Berechnung des Schalldruckes kann nach der Lösung der Strömungsfeldgleichungen (4.2.2/2o) - (4.2.2/23) und des zugehörigen charakteristischen Systemes (4.3.2/16) - (4.3.2/21)der Eikonalgleichung mit Hilfe der Transportgleichung (4.3.3/16) vorgenommen werden. Es wurde gezeigt, daß die korrekte Form der Transportgleichung unter den atmosphärischen Bedingungen nicht durch die Erhaltung des "wave-action-flux" gegeben ist, wie bei den bisher angewandten ray-tracing Methoden vielfach unterstellt. Nur im Sonderfall der Ausbreitung parallel zum Strömungsgeschwindigkeitsvektor sind die Charakteristiken für die "wave-action" mit denen der Eikonalgleichung und der Transportgleichung für W unter den im Strömungsfeld der Atmosphäre vorliegenden Bedingungen nicht identisch.

Es ist deshalb nicht möglich - wie bisher bei ray-tracing Methoden unterstellt - außer im Sonderfall den Schalldruckpegel im inhomogenen Medium durch Anwendung des Satzes von einer Erhaltung der "wave-action" zu gewinnen. Die korrekte Form der charakteristischen Gleichung für die "wave-action" ist vielmehr durch (4.3.3/16) gegeben.

5 Die numerische Lösung der asymptotischen Gleichungen am Beispiel der Schallausbreitung im Strömungsfeld um einen Lärmschutzwall

Die im letzten Kapitel hergeleiteten akustischen und strömungsmechanischen Gleichungen haben allgemeinen Charakter. Sie sind für viele Probleme der akustischen Wellenausbreitung in inhomogenen Strömungsfeldern niedriger Strömungsgeschwindigkeit anwendbar.

Die Lösung der im 4. Kapitel entwickelten Gleichungen kann in vielen praktisch interessierenden Fällen nur numerisch gefunden werden und ist mit einigem Aufwand verbunden, weil die Lösung der akustischen Gleichungen die Berechnung der ortsabhängigen Strömungsfeldkoeffizienten $\hat{\vec{v}}_0$ sowie $\hat{T}_0$ erfordert. Es ist daher wichtig, Verfahren zu finden, die eine Lösung mit geringem Speicher- und Rechenzeitaufwand erlauben.

An der Schallausbreitung im Strömungsfeld eines Lärmschutzwalles wird exemplarisch gezeigt, daß Verfahren zur Verfügung stehen, die nur begrenzte Anforderungen an den Speicherplatzbedarf und die Rechengeschwindigkeit stellen, so daß eine Lösung ohne großen numerischen Aufwand mit Hilfe eines Minicomputers gefunden werden kann. Dabei ist es dann auch möglich, aus theoretischer Sicht auf eine Frage einzugehen,die bisher durch Messung nicht beantwortet werden konnte. Der Lärmschutzwall stellt nicht nur ein Hindernis für die akustische Welle dar, sondern auch für das mittlere Strömungsfeld, das hierdurch vom geschichteten Verlauf über ebenem Erdboden abweicht. Wie groß sind die Einflüsse dieser Störung auf die akustische Wellenausbreitung? Ist es notwendig, diesen Einfluß bei der Berechnung der Schalldruckpegelminderung zu berücksichtigen oder kann der Windeinfluß allein durch den Weg der Welle durch das ungestörte geschichtete Strömungsfeld beschrieben werden, wie bisher von DE JONG (1974); DE JONG & STUSNICK (1976); NIJS (1980) vorgeschlagen ?

5.1 Bisherige Untersuchungen zum Windeinfluß auf Schallschirme

Seit Schallschirme (Lärmschutzwände und -wälle) eingesetzt werden, sind große Anstrengungen unternommen worden, die durch diese Schallschutzmaßnahmen hervorgerufenen Schalldruckpegelminderungen vorab verläßlich berechnen zu können. Eine gute Übersicht über die Forschungsergebnisse bis zu diesem Zeitpunkt hat KURZE (1974), (1977) zusammengestellt.

Die Schalldruckpegelminderung von Schallschirmen beruht darauf, daß die akustische Welle nur auf dem Umweg über die beugende Kante des Hindernisses den Empfänger erreichen kann. Durch die Beugung entstehen abhängig von der Wellenlänge akustische Schattenzonen mit um bis zu ca 15 dB - 25 dB reduzierten Schalldruckpegeln. Daher stand in den ersten Jahren die Untersuchung der Beugungseigenschaften von Schallschirmen verschiedener Beschaffenheit im Mittelpunkt der Forschung. Ausgehend von theoretischen Untersuchungen von REDFEARN (1940) schlug MAEKAWA (1968) für Lärmschutzwände und PIERCE (1974) für Wälle vereinfachte Diagramme bzw. Näherungsformeln für die Berechnung der Beugungseffekte vor, die in der Folgezeit von Normen und Richtlinien zugrunde gelegt wurden.

Dieser erste Teil der Forschung kam mit den Labormessungen von MAEKAWA (1968) und IVEY & RUSSEL (1977) zu einem vorläufigen Abschluß. MAEKAWA konnte durch Messung mit Hilfe einer Impulsmethode an einem verkleinerten akustischen Modell zeigen, daß das von ihm vorgeschlagene Diagramm bis auf ca -1dB, +2 dB mit seinen Labormessungen übereinstimmte und damit eine für praktische Anwendungen hinreichende Genauigkeit aufwies. Die Modellmessungen von IVEY & RUSSEL (1977) konnten PIERCE's Ergebnisse nur der Tendenz nach bestätigen. Die teilweise beträchtlichen absoluten Abweichungen von 6 dB wurden von den Autoren auf nicht berücksichtigte Absorptionseffekte zurückgeführt.

Gegenüber den Modellmessungen im Labor brachten Freifeldmessungen eine gewisse Ernüchterung, was die Vorhersagegenauigkeit für die Pegelminderungen angeht. Freifeldmessungen wurden u. a. von REINHOLD (1971), (1974), SCHOLES u. a. (1971) durchgeführt. REINHOLD fand Abweichungen von bis zu ± 7 dB bei fast allen Frequenzen. Diese großen Abweichungen wurden vom Autor auf metereologische Bedingungen und Bodeneinflüsse zurückgeführt. Weil Sender- und Em-

pfängerstandorte, Wind- und Bodenbedingungen nicht gemessen werden, lassen sich aus dieser Arbeit keine Hinweise auf den Einfluß einzelner dieser Parameter entnehmen.

Die Ergebnisse von SCHOLES u. a. (1971) haben durch die systematische Erfassung und Auswertung der Meßbedingungen weitere Einsichten in die Ursachen für die Diskrepanzen zwischen theoretischen Vorhersagen und Freifeldmessungen ermöglicht. Die Autoren maßen über 1o - 2o Messungen gemittelte Schalldruckpegel mit oktavbreitem Rauschen für vier Lärmschutzwände verschiedener Höhe, zwei Senderabstände und vier Empfängerabstände, fünf Empfängerhöhen bei Windstille sowie bei Windgeschwindigkeiten in 1,5o m Höhe von 5 m/s (Mit- und Gegenwind). Die Messungen erfolgten über Grasland. Das Gras war bis zu 3o m Abstand von der Wand auf maximal 1o cm Höhe geschnitten worden. Auch hier ergaben sich erhebliche Abweichungen von MAEKAWA's Vorhersagen. So betrug z. B. der Schalldruckpegelunterschied zwischen Mit- und Gegenwindbedingungen bei 4 KHz für eine Empfängerhöhe von 1.5 m und einem Empfängerabstand von 12o m 21 dB. Den größten Einfluß hatten allerdings Phasenauslöschungseffekte durch Bodenreflexion. Dadurch ergaben sich Pegeleinbrüche von bis zu ca 2o dB für Sender- und Empfängerabstände von 4o m auch ohne Schallschirm.

Die relative Phasenlage von direkter und reflektierter Welle hängt stark von Änderungen des Ausbreitungsweges der Welle ab. Da die Ausbreitungswege der Welle durch den Schallschirm stark verändert werden, verschieben sich auch die Minima im Spektrum des Empfängerschalldruckes. Typische Verschiebungen für das 1. Minimum traten in den Meßwerten zwischen 25o und 5oo Hz auf. Wird nun die Pegeldifferenz zwischen dem Empfangspegel ohne Wand und dem Empfangspegel mit Wand gemessen, so schwankt dieser Wert sehr stark.
Um den Windeinfluß vom Bodeneinfluß zu trennen und diesen allein zu bestimmen, schlugen die Autoren vor, die Pegeldifferenz zwischen Empfangspegel ohne Wind und Empfangspegel mit Wind unter sonst gleichen Bedingungen zu messen. Diese Pegeldifferenz wird von den Autoren als "windreduction" bezeichnet. In dieser Arbeit wird dafür der Begriff Windminderung verwendet.

Weil der Wind aber auch die Schallausbreitungswege und damit auch die relative Phasenlage zwischen reflektierter und

direkter Welle verändert, ist eine vollständige Trennung von Wind- und Bodeneinfluß auf diese Weise nicht möglich. Bei relativ breitbandigen Messungen mit oktavbreitem Rauschen, wie bei SCHOLES u.a., tritt dieser Effekt jedoch nicht so deutlich auf.

Es ließen sich aber gewisse Tendenzen für den Windeinfluß ermitteln : Im allgemeinen ist der Windeinfluß bei Anwesenheit des Schallschirmes umso größer, je höher die Frequenz und je größer Sender- und Empfängerabstand zum Schallschirm sind. Mitwindbedingungen führen im allgemeinen zu höheren, Gegenwindbedingungen zu niedrigeren Schalldrücken am Empfangsort. Bei einer 4.9 m hohen Lärmschutzwand lagen typische Pegeländerungen von Mit- gegenüber Gegenwind bei einer Senderhöhe von 0.7 m, einem Sender-Wand-Abstand von 25 m und einer Empfängerhöhe von 6 m zwischen ca 0 dB (250 Hz, 15 m Wandabstand) und ca 15 dB (4 KHz, 120 m Abstand).

Seit den Messungen von SCHOLES u.a. werden Boden- und Windeinfluß stärker untersucht, um verläßlichere Vorhersagen für die Pegeländerungen bei der Schallausbreitung im Freien zu erhalten. Neuere Untersuchungen des Bodeneinflusses wurden von CHESSEL (1977); EMBLETON u.a.(1978); ISEI u.a.(1980); EMBLETON (1980 b) vorgenommen. Meist wird ein bereits von JONASSEN (1972) vorgeschlagenes Modell verwendet, das einige Zeit unbeachtet geblieben war. Schwierigkeiten bei der genauen Berechnung des Bodeneinflusses nach diesem Modell ergeben sich daraus, daß die praktisch gemessenen Impedanzwerte des Erdbodens selbst für gleiche Oberflächenbeschaffenheit stark variieren /EMBLETON (1980 a)/ und die Empfangsschalldruckpegel sehr empfindlich gegen Parametervariationen sind /CHESSEL (1977)/.

Wegen der großen meßtechnischen und theoretischen Schwierigkeiten haben sich bisher außer SCHOLES u.a. erst drei Autoren mit dem Windeinfluß auf Schallschirme befaßt. Sowohl in der Arbeit von DE JONG (1974), DE JONG & STUSNICK (1976) als auch in der Arbeit von NIJS (1980) wird versucht, durch Modellmessungen im Windkanal genauere Ergebnisse zu erhalten. Gegenüber Freifeldmessungen haben Windkanalmessungen den Vorteil, daß sich die Eigenschaften des Strömungsfeldes besser kontrollieren lassen und Temperatureinflüsse von vornherein ausgeschlossen werden können. Schwierigkeiten ergeben sich daraus, daß die begrenzten Abmessungen des Windkanals

Modelle sehr kleiner Maßstabsfaktoren (1 : 32 bei DE JONG) erfordern. Die kleinen Modellabmessungen und hohen Frequenzen erfordern sehr kleine Sender, sowie kleine und damit sehr unempfindliche Mikrofone (1/1o"Mikrofon mit -114 dB re 1 V/µbar) und hohe Schalldrücke. Die als Sender verwendete Knallfunkenstrecke erzeugt sehr hohe Schalldruckpegel (135 dB in 61 cm Abstand).

Modellmessungen in Strömungen sind aber, wie in Kapitel 4 gezeigt, wegen des Auftretens von Termen der $\mathcal{O}(\frac{\varepsilon}{Ma^2}, \frac{\varepsilon}{Ma})$ nicht mehr invariant gegenüber so erheblichen Schalldruckpegelerhöhungen, sodaß nicht davon ausgegangen werden kann, daß die Meßergebnisse mit denen niedrigerer Schalldruckpegel identisch sind. (Für L = 14o dB und v_r = 4.4 m/s liegt der Rückwirkungsfehler bei δ = 7oo %)

In DE JONG's Messungen stellte sich ferner heraus, daß die Nachbildung der Impedanz des Erdbodens nicht ganz einfach ist. Trotz sorgfältiger Auswahl des Absorptionsmaterials ergaben sich Abweichungen in den Empfangspegeln von bis zu 6 dB gegenüber den Freifeldmessungen von SCHOLES u.a. selbst bei Windstille ohne Schallschirm.

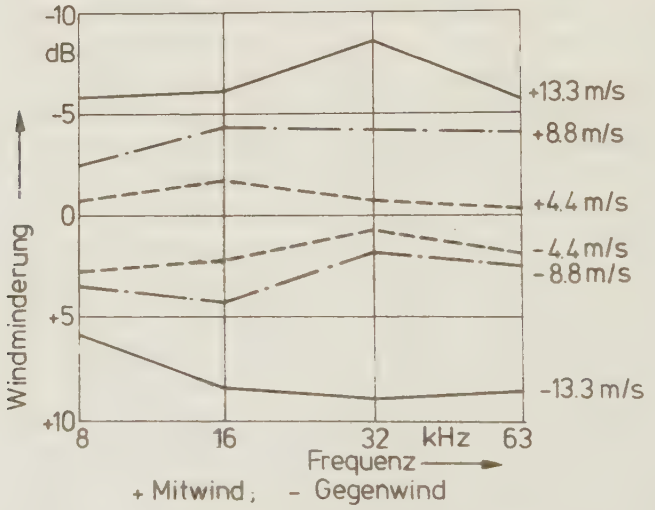

Bild 5/1 : Windminderung einer Lärmschutzwand nach DE JONG (1974) (Modellmaßstab 1:32)

Senderabstand 3o.5cm, Empfängerabstand 91.5cm, Sender- und Empfängerhöhe 1o.2 cm

Sender- und Empfängerstandorte wurden im weiteren Verlauf so gewählt, daß der Bodeneffekt minimal wurde, um den Windeinfluß allein messen zu können. Gemessen wurde jeweils die Windminderung. Die gemessenen Pegel wurden unter sonst konstanten Bedingungen jeweils über 5 Messungen (Windstille) bzw. 1o Messungen (Wind) gemittelt. Das Strömungsgeschwindigkeitsprofil entsprach dem logarithmischen Profil der neutralen Atmosphäre mit einer Rauhigkeitslänge im Modell von 0.18 mm bei Windgeschwindigkeiten von 4.4 m/s, 8.8 m/s und 13.3 m/s in 5 cm Höhe. Die Windrichtung war senkrecht zur Wand.

Es wurden 3 verschiedene Schallschirme von 17.8 cm Höhe gemessen : eine dünne Wand, ein Erdwall mit trapezförmigem Querschnitt und einer mit dem Querschnitt einer Gauß-Funktion. Bild 5.1 zeigt die Ergebnisse für die dünne Wand.

Befanden sich Sender und Empfänger sehr nahe an der Wand und über dem Erdboden, so ergaben sich nur geringe Windeinflüsse (Bild 5/2)

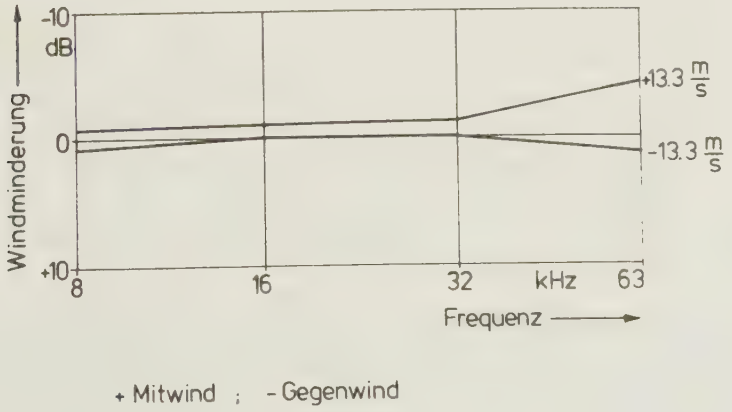

Bild 5/2: Windminderung einer Lärmschutzwand nach DE JONG (1974) (Modellmaßstab 1:32)
Sender- und Empfängerabstand 3o.5 cm
Sender- und Empfängerhöhe 2.5 cm

Ein Vergleich der Windminderungen von Schallschirmen verschiedenen Querschnittes ergab erst für sehr hohe Strömungsgeschwindigkeiten unterschiedliche Werte (Bild 5/3).

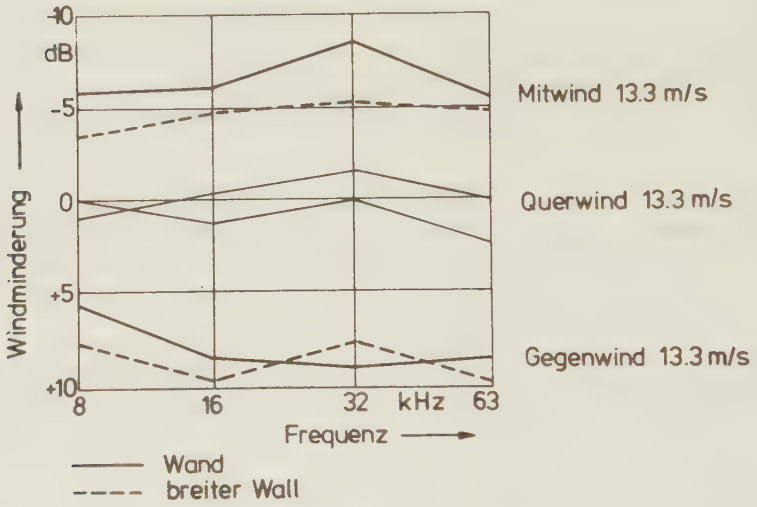

Bild 5/3 : Windminderungen von Schallschirmen verschiedenen Querschnitts (nach DE JONG) (Modellmaßstab 1:32) Sender- und Empfängerstandort wie in Bild 5/2

Windrichtungen parallel zur Wand ergaben auch bei 13.3 m/s nur Windminderungen von maximal 1,7 dB.

DE JONG's Messungen konnten einige Ergebnisse von SCHOLES u. a. bestätigen: die Zunahme des Windeinflusses mit der Windgeschwindigkeit, den Einfluß von Mit- und Gegenwind und den geringen Einfluß des Querwindes. Ein mit höheren Frequenzen deutlich zunehmender Windeinfluß, wie von SCHOLES festgestellt, geht aber aus DE JONG's Modellmessungen nicht hervor. Eher schon ließe sich aus den Daten nach Bild 5/1 ein konstanter Windeinfluß über der Frequenz entnehmen, der bei niedrigen Frequenzen etwas geringer wird.

Weil geeignete geometrisch-akustische Gleichungen nicht zur Verfügung standen, hat DE JONG eine Hypothese aufgestellt, die das Verhalten der Windminderung mit Hilfe einer Anlehnung an bekannte Modelle der geometrischen Akustik für ruhendes Medium erklären soll. Das Prinzip von DE JONG's Hypothese ist in Bild 5/4 am Beispiel eines Lärmschutzwalles dargestellt.

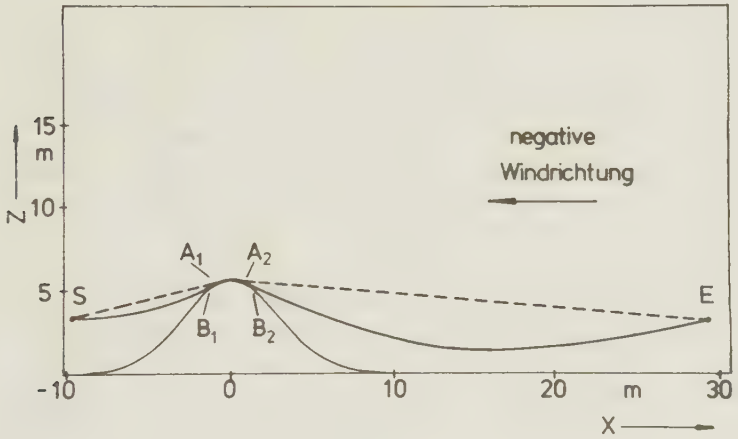

Bild 5/4 : DE JONG's Hypothese zur Erklärung des Windeinflusses bei Lärmschutzwällen und seine Meßanordnung im Originalmaßstab

Danach wird die Windminderung aus einer Kombination von Beugung der akustischen Welle am Schallschirm und Brechung der akustischen Welle durch das nichthomogene Medium hervorgerufen. Der Schalldruck am Empfängerort wird durch den Weg bestimmt, den die Welle entlang den Charakteristiken der Transportgleichung vom Sender (S) zum Empfänger (E) zurücklegt. Die Ausbreitungsdämpfung wird durch Anwendung des Energieerhaltungssatzes durch Integration entlang eines differentiell kleinen Charakteristikenbündels berechnet. Die Minderung des Schalldruckes durch die Beugung wird dabei durch den Weg der Kriechwelle entlang der Oberfläche des beugenden Objektes bestimmt. Sie hängt ab von der Form des Hindernisses und steigt an

mit der Frequenz und der Weglänge entlang dem Hindernis. Bei ungehinderter Ausbreitung im homogenen Medium sind die Charakteristiken Geraden, so daß sich der Weg S A_1 A_2 E ergibt. Aus der Arbeit von PIORR (1980) geht hervor, daß der Schalldruckpegel im Schattenbereich eines Lärmschutzwalles sehr empfindlich gegen geringe Änderungen des Ausbreitungsweges entlang dem Wall ist. Im inhomogenen Medium wird die Welle gebrochen. Daher sind die Charakteristiken der Transportgleichung die gekrümmten Kurven S B_1 B_2 E . Dadurch ändert sich auch der für die Beugung maßgebliche Weg der Kriechwelle entlang dem Wall (in diesem Fall S B_1 bzw. S B_2). Da im homogenen Medium der Schalldruckpegel am Empfänger sehr empfindlich gegen Änderungen des Ausbreitungsweges der Kriechwelle entlang dem Wall ist, macht DE JONG diese Unterschiede in erster Linie für den Windeinfluß verantwortlich. Eine Überprüfung von DE JONG's Hypothese war bisher nicht möglich, weil geeignete geometrisch-akustische Gleichungen für die Schallausbreitung unter den hier gegebenen Strömungsfeldbedingungen nicht bekannt waren. Der von DE JONG vorgenommenen groben rechnerischen Abschätzung liegen vereinfachende Annahmen zugrunde, die - wie im letzten Kapitel gezeigt - aber nur für die Punktquelle im ruhenden Medium gültig sind. Mit Hilfe der folgenden Annahmen konnten bekannte Ergebnisse für die Abschätzung verwendet werden:

1. Die Charakteristiken der Eikonalgleichung sind mit den Charakteristiken der Transportgleichung identisch. Die Schalldruckamplitude nimmt entlang der Charakteristiken proportional zur Bogenlänge der Charakteristiken ab.
2. Der Einfluß des Schallschirmes auf das Strömungsfeld ist vernachlässigbar und das Strömungsfeld ist geschichtet. Das Windprofil ist parabolisch und die Charakteristiken sind Kreisbögen.
3. Das Strömungsfeld hat keinen Einfluß auf die Beugung.

Mit Hilfe dieser einfachen Rechnung war es immerhin möglich, die Tendenz der Meßergebnisse, die Abnahme der Windminderung bei Mitwindbedingungen und die Zunahme bei Gegenwindbedingungen, zu bestätigen. Für die niedrigste Windgeschwindigkeit ließen sich die gemessenen Windminderungen von ca 4 dB mit der Rechnung bis auf ca 2 dB in Übereinstimmung bringen. Für höhere Windgeschwindigkeiten ergaben sich die in Bild 5/5 dargestellten Abweichungen.

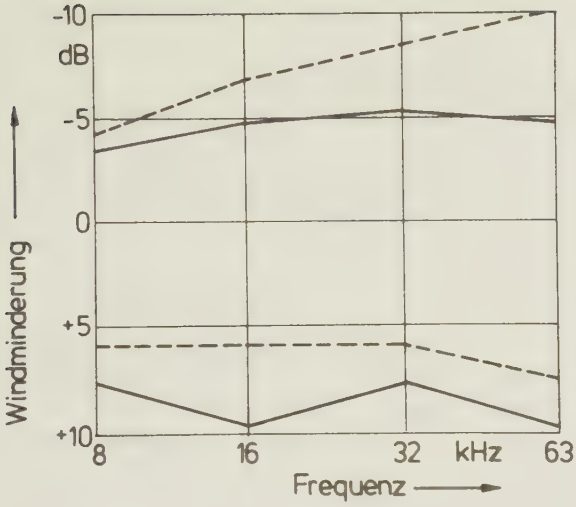

Bild 5/5 : Vergleich der Meßergebnisse (dick) mit der rechnerischen Abschätzung (gestrichelt) (nach DE JONG)

Wie bereits in Kapitel 3 dargestellt, enthält die Windminderung einen Anteil, der durch die Brechung der Welle im mittleren Strömungsfeld hervorgerufen wird und einen Beitrag der von der Turbulenz herrührt. Beide Anteile können nicht streng voneinander getrennt werden. Aus den hier zitierten Messungen ergeben sich aber einige Hinweise darauf, daß die gemessenen Windminderungseffekte im wesentlichen durch Brechung hervorgerufen werden und Turbulenz eine geringere Rolle spielt: Für eine Dominanz der Brechungseinflüsse sprechen:

- der starke Einfluß der Windrichtung auf die Windminderung von bis zu ±8 dB verbunden mit der Pegelabnahme für Gegenwind,

- der deutliche Einfluß von Phasenauslöschungseffekten durch Bodenreflexion.

DE JONG konnte aus dem Vergleich zweier Modellmessungen einen weiteren Hinweis auf den Beitrag der Turbulenz zur Windminderung erhalten. Er benutzte einerseits einen Windkanal, bei dem der Verlauf der gemittelten quadratischen Schwankungsbewegung über der Höhe im

gleichen Maßstab verkleinert worden war wie alle übrigen Modellabmessungen. Bei einem anderen Windkanal war die Turbulenz nicht skaliert. Für die Lärmschutzwand ergab sich bei 4.4 m/s, einem Senderabstand von 3o.5 cm, einem Empfängerabstand von 91.5 cm und einer Sender- und Empfängerhöhe von 1o.2 cm bei Mitwindbedingungen eine mittlere Differenz von 1.2 dB und bei Gegenwind von 1.7 dB zwischen den Messungen. Die unskalierte Turbulenz führte bei Mit- und Gegenwind zu höheren Pegeln als die skalierte Turbulenz.

NIJS (198o) hat versucht, die unbefriedigende Abschätzung von DE JONG durch die Anwendung von THOMPSON's Modell der geschichteten Atmosphäre zu verbessern und gleichzeitig den von DE JONG's Messung weitgehend ausgeschlossenen Bodeneinfluß zu erfassen. Auch NIJS nimmt an, daß das Strömungsfeld nicht vom geschichteten Verlauf abweicht. Das logarithmische Windprofil wurde durch schmale Schichten konstanter Windgeschwindigkeitszunahme modelliert, um eine stückweise analytische Berechnung der Charakteristiken zu ermöglichen. Die Berechnung wurde mit einer Messung im Windkanal verglichen. Es ergaben sich Abweichungen von bis zu 3o dB, die vom Autor auf die Schwierigkeit zurückgeführt wird, den Verlauf des Windprofils in Bodennähe genau zu messen. Da die Gültigkeit des logarithmischen Windprofils seit langem gesichert ist, und es sich aus 2 Messungen leicht rekonstruieren läßt, ist diese Begründung nicht stichhaltig. Die schon bei Windstille zwischen Berechnung und Messung auftretenden Differenzen von 15 dB deuten vielmehr darauf hin, daß der Bodeneinfluß im Modell nicht richtig erfaßt wurde und dieser Effekt sich, wie zuvor beschrieben, durch den Wind noch verstärkt.

Da NIJS die genauen Meßbedingungen nicht dokumentiert und seine Meßergebnisse wenig zuverlässig sind, wird im folgenden auf die Meßbedingungen von DE JONG Bezug genommen.

5.2 Berechnung des Strömungsgeschwindigkeitsfeldes um einen Lärmschutzwall

Es sollen nun einige vereinfachende Annahmen gemacht werden, die den Meßbedingungen von DE JONG entsprechen. Im folgenden wird das Strömungsfeld zweidimensional angenommen. In großem Abstand zum Wall ist es geschichtet und gleich dem mittleren Strömungsfeld der neutralen Atmosphäre (Bild 5/6),und die Temperatur ist konstant

$$\vec{v}_{0g}(z) = (u_0(z),\ 0,\ 0)\ ;\quad u_0(z) = a\ u_* \log \frac{z + z_0}{z_0} \qquad (5.2/1)$$

Dieses Feld wird durch den Wall gestört und es entsteht das nichtgeschichtete Feld:

$$\vec{v}_0(x,z) = (u_0(x,z),\ 0,\ w_0(x,z))$$

Die hier angenommenen Bedingungen sind für DE JONG's Modellmessungen im Windkanal erfüllt.

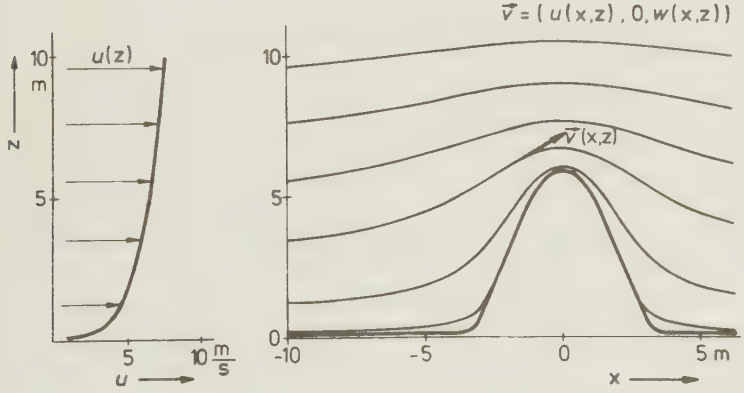

Bild 5/6 : Strömungsfeld um einen Lärmschutzwall

5.2.1 Integralgleichungsmethode zur Lösung des Randwertproblems

Das Strömungsfeld muß nun die Gleichung (4.1.3/3) erfüllen. Ferner muß die Normalkomponente der Strömungsgeschwindigkeit entlang der Erdoberfläche und entlang dem Wall verschwinden: $\vec{v}_{0_n} = 0$. Diese Bedingung ist durch die Annahme für $\vec{v}_{0_g}$ entlang dem Erdboden automatisch erfüllt. Die hier vernachlässigten Navier-Stokes Terme erzwingen, daß auch die Tangentialkomponente von $\vec{v}$ entlang dem Wall verschwinden muß. Der hierdurch hervorgerufene Fehler beschränkt sich auf Abstände von der Wallkontur, die in der Größenordnung z_0 liegen. Da z_0 sehr klein ist, $z_0 \ll 3$ cm , ist dieser Fehler auf sehr kleine Abstände beschränkt. Das geschichtete Strömungsfeld ruft entlang dem Wall dagegen die Normalkomponente $\vec{v}_{0_{gn}}$ hervor. Um diese Komponente zu kompensieren, wird ein Störfeld $\vec{v}_{0_s}$ überlagert, das die Bedingungen:

$$\operatorname{div} \vec{v}_{0_s} = 0 \qquad (5.2.1/2)$$

$$\vec{v}_{0_{sn}} = - \vec{v}_{0_{gn}} \qquad (5.2.1/3)$$

erfüllt. Für das gesamte Strömungsfeld ist dann

$$\operatorname{div} \vec{v}_0 = \operatorname{div} (\vec{v}_{0_s} + \vec{v}_{0_g}) = 0 \qquad (5.2.1/4)$$

und $\vec{v}_{0_n} = 0$

Das Störfeld $\vec{v}_{0_s}$ kann aus einem skalaren Potential Φ_s abgeleitet werden:

$$v_{0_s} = + \operatorname{grad} \Phi_s \qquad (5.2.1/5)$$

Die Gleichungen des Störfeldes lauten dann:

$$\Delta \Phi_s(x,z) = 0 \qquad (5.2.1/6)$$

und

$$\vec{n} \cdot \operatorname{grad} \Phi_s = \frac{\partial \Phi_s}{\partial n} = - v_{0_{gn}} \qquad (5.2.1/7)$$

mit $\vec{n}$ als Einheitsnormale.

Das Potential Φ_s ergibt sich somit als Neumann'sches Randwertpro-

blem der Potentialtheorie. Die Lösung soll auf numerischem Wege erfolgen, sodaß Lärmschutzwälle mit beliebiger Form untersucht werden können. Die Berechnung auf einem Minicomputer mit auf 6 Dezimalstellen begrenzter Genauigkeit und begrenztem Speicher erfordert, daß das numerische Verfahren sehr stabil ist und möglichst wenig Speicherraum zur Speicherung des Strömungsfeldes benötigt. Diese letzte Bedingung wird gerade im Hinblick auf die weitere Verwendung der Koeffizienten des Strömungsfeldes in der numerischen Lösung des akustischen Gleichungssystems wichtig. Wegen der Stabilitätsanforderungen wird daher das Neumann'sche Randwertproblem auf eine Integralgleichung zurückgeführt und diese nach einem von JASWON & SYMM (1977) beschriebenen Verfahren gelöst.

Dabei wird das 2-dimensionale Potential $\Phi_s(x,z)$ als Linienintegral über eine zunächst unbekannte Quelldichtebelegung $\gamma(\vec{s})$ entlang der Randkurve des Walles angenommen:

$$\Phi_s(\vec{r}) = \int_{\partial B} \ln |\vec{r} - \vec{s}| \, \gamma(\vec{s}) \, ds \qquad \vec{r} \notin B \qquad (5.2.1/8)$$

Hier bezeichnet $\vec{r}$ den Ortsvektor eines Aufpunktes im Gebiet B außerhalb der Randkurve ∂B und $\vec{s}$ den Ortsvektor eines Punktes auf der Randkurve. Die zunächst unbekannte Quelldichte $\gamma(\vec{s})$ muß nun so bestimmt werden, daß die Bedingung (5.2.1/7) erfüllt ist. Der Ansatz (5.2.1/8) gewährleistet, daß die Bedingung (5.2.1/6) außerhalb ∂B automatisch erfüllt ist. In dieser Form ist es möglich, das 2-dimensionale Strömungsfeld dadurch zu gewinnen, daß lediglich der 1-dimensionale Verlauf der Quelldichte $\gamma(\vec{s})$ gespeichert wird und, wie noch gezeigt wird, das Strömungsfeld dann auf einfache Weise an den Punkten berechnet wird, an denen es bei der Lösung der akustischen Gleichungen auch tatsächlich gebraucht wird. Daß das Speicherplatzproblem in diesem Zusammenhang nicht unbedeutend ist, zeigt folgende einfache Überlegung: Eine Diskretisierung des Feldes in je 1oo Punkte pro Dimension benötigt allein zur Speicherung des Feldes $1o^4$ Gleitkomma-Speicherplätze oder $2 \times 1o^4$ Festkomma-Speicherplätze. Dieser Wert ist in Beziehung zu setzen zu den 32 K Speicherraum eines Minicomputers.

Da durch den Ansatz (5.2.1/8) die Gleichung (5.2.1/6) automatisch erfüllt ist, muß nun noch dafür gesorgt werden, daß der Randwert den

von Gleichung (5.2.1/6) vorgeschriebenen Wert annimmt. Befindet sich der Aufpunkt $\vec{r}$ in der Nähe der Randkurve ∂B und berechnet man die Ableitung von $\Phi_s(\vec{r})$ im Punkt $\vec{r}$ normal zu ∂B in Richtung B für festes $\vec{s}$, so erhält man

$$\frac{\partial \Phi_s(\vec{r})}{\partial n} = \int_{\partial B} \frac{\partial}{\partial n} (\ln |\vec{r} - \vec{s}|) \gamma(\vec{s}) \, ds \qquad (5.2.1/9)$$

Nähert sich der Punkt $\vec{r}$ nun auf der Randkurve dem Punkt $\vec{s}$, so wird der Integrand wegen $\ln |\vec{r} - \vec{s}|$ singulär. Es kann allgemein gezeigt werden, daß dann das Integral den Cauchy'schen Hauptwert $+ \pi \gamma(\vec{r})$ annimmt.

Wegen (5.2.1/7) kann dann (5.2.1/9) als

$$v_{0gn}(\vec{r}) = \int_{\partial B, r \neq s} \left(\frac{\partial}{\partial n} (\ln |\vec{r} - \vec{s}|) \gamma(\vec{s}) \, ds \right) + \pi \gamma(\vec{r}) \qquad \vec{r} \in \partial B \qquad (5.2.1/10)$$

geschrieben werden.

Damit sind in (5.2.1/10) alle Größen außer γ bekannt und es ergibt sich eine Fredholm'sche Integralgleichung 2. Art für die unbekannte Quelldichte $\gamma(\vec{s})$.

Die für die numerische Lösung notwendige weitere Diskretierung für hinreichend große Punktdichte erfolgt nun dadurch daß

1. die Randkurve des Walles punktweise vorgegeben wird,

2. angenommen wird, daß die Verbindungslinien zwischen den Punkten Geradenstücke sind,

3. γ entlang dieser N Geradenstücke h_k konstant ist.
   (Bild 5/7)
   Aus (5.2.1/10) ergibt sich dann:

$$- v_{0gn}(\vec{r}) = \sum_{k=1}^{N} \left(\gamma_k \int_{\vec{s} \neq \vec{r}} \frac{\partial}{\partial n} \ln |\vec{r} - \vec{s}| ds \right) + \pi \gamma(\vec{r}) \qquad (5.2.1/11)$$

$$\vec{r} \in \partial B$$

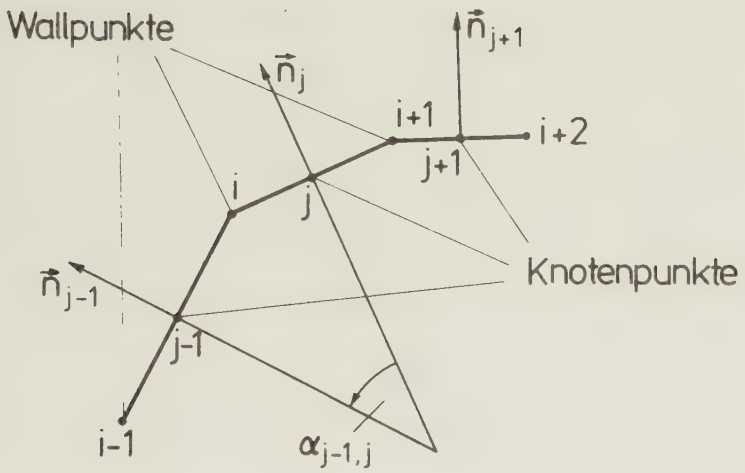

Bild 5/7: Diskretisierung der Wallkurve

4. Durch eine als "point-matching" bezeichnete Methode erhält man dann ein Gleichungssystem von N Gleichungen in N Unbekannten γ_k . Es wird nämlich (5.2.1/11) jeweils für die N Mittelpunkte $\vec{r}_j = \frac{1}{2}(\vec{r}_i + \vec{r}_{i+1})$ gelöst. Die Mittelpunkte $\vec{r}_j$ werden auch als Knotenpunkte bezeichnet.

Schließlich ergibt sich aus (5.2.1/11)

$$- v_{0gn}(\vec{r}_j) = \sum_{k=1}^{N} \left(\gamma_k \cdot \int_{\vec{r}_j \neq \vec{s}} \frac{\partial}{\partial n_j} (\ln |\vec{r}_j - \vec{s}|)\, ds \right) + \pi\, \gamma(\vec{r}_j)$$

$$j = 1, \ldots, N \qquad (5.2.1/12)$$

Zur Lösung dieses linearen Gleichungssystems in den Unbekannten γ_k müssen nun noch die expliziten Darstellungen von $v_{0gn}(\vec{r}_j)$ und die Koeffizienten

$$K_{jk} = \int_{\vec{r}_j \neq \vec{s}} \frac{\partial}{\partial n_j} (\ln |\vec{r}_j - \vec{s}|)\, ds \qquad (5.2.1/13)$$

gefunden werden.

5.2.2 Berechnung der Koeffizienten des Gleichungssystems und der Strömungsgeschwindigkeit

Für die Berechnung von K_{jk} wurde von JASWON & SYMM vorgeschlagen, das Integral in (5.2.1/13) durch numerische Quadratur zu lösen. Bei der Berechnung zeigte es sich jedoch, daß diese Lösung an Stellen großer Krümmungen in der Randkurve ungenauere Ergebnisse lieferte als eine analytische Lösung. Da die analytische Lösung des Integrals in (5.2.1/13) keinerlei Schwierigkeiten bietet, wurde sie vorgezogen. Bild 5/ 8 zeigt ein Linienelement h_k in allgemeiner Lage

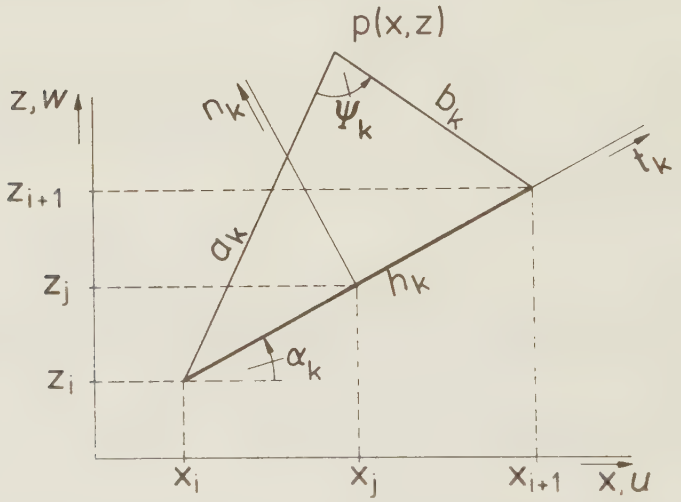

Bild 5/8: Linienelement in allgemeiner Lage

T_k und N_k bezeichnen die Strömungsgeschwindigkeitskomponenten normal und tangential zu h_k :

$$T_k(x,z) = \frac{\partial \phi}{\partial t_k} = \gamma_k \int_{h_k} \frac{\partial}{\partial t_k} \ln |\vec{r}_k - \vec{s}| \, ds = \gamma_k L_k(x,z) \qquad (5.2.2/1)$$

$$L_k(x,z) = \frac{1}{2} \ln \frac{a_k^2}{b_k^2} \qquad (5.2.2/2)$$

und

$$N_k(x,z) = \frac{\partial \Phi}{\partial n_k} = \gamma_k \int_{h_k} \frac{\partial}{\partial n_k} \ln |\vec{r}_k - \vec{s}| \, ds = \gamma_k \Psi_k(x,z) \qquad (5.2.2/3)$$

$$a_k = \sqrt{(x - x_i)^2 + (z - z_i)^2} \qquad (5.2.2/4)$$

$$b_k = \sqrt{(x - x_{i+1})^2 + (z - z_{i+1})^2} \qquad (5.2.2/5)$$

$$h_k = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (z_{i+1} - z_i)^2} \qquad (5.2.2/6)$$

$$\Psi_k = \arctan \frac{(x - x_i)}{(z - z_i)} - \arctan \frac{(x - x_{i+1})}{(z - z_{i+1})} \qquad (5.2.2/7)$$

Aus der Gleichung für $N_k(x,z)$ kann der in (5.2.1/1o) angegebene Grenzwert für $N_k(x_j, z_j)$ leicht bestätigt werden.
Die Strömungsgeschwindigkeitskomponenten u_{sk} und w_{sk} des k-ten Linienelementes

$$u_{sk}(x,z) = T_k(x,z) \cos \alpha_k - N_k(x,z) \sin \alpha_k \qquad (5.2.2/8)$$

$$w_{sk}(x,z) = N_k(x,z) \cos \alpha_k + T_k(x,z) \sin \alpha_k \qquad (5.2.2/9)$$

Für die Koeffizienten K_{jk} ergibt sich :

$$K_{jk} = \Psi_k(x_j, z_j) \cos \alpha_{jk} + L_k(x_j, z_j) \sin \alpha_{jk} \qquad k \neq j \qquad (5.2.2/1o)$$

α_{jk} ist der Winkel zwischen der Normalkomponente des Elementes j und der eines beliebigen Elementes k . (Im Bild 5/5 ist die Richtung von α_{jk} für k = j - 1 angegeben)

Wegen des durch Gleichung (5.2.1) gegebenen Verlaufes erhält man

$$v_{ogn}(r_j) = + u_g(z) \sin \alpha_j \qquad (5.2.2/11)$$

Die Strömungsfeldkomponenten u und w ergeben sich mit :

$$u(x,z) = u_g(z) + \sum_{k=1}^{N} u_{sk}(x,z) \qquad (5.2.2/12)$$

$$w(x,z) = \sum_{k=1}^{N} w_{sk}(x,z) \qquad (5.2.2/13)$$

zu

$$u(x,z) = au_* \ln \frac{z + z_0}{z_0} + \sum_{k=1}^{N} T_k(x,z) \cos \alpha_k - N_k(x,z) \sin \alpha_k \qquad (5.2.2/14)$$

$$w(x,z) = \sum_{k=1}^{N} N_k(x,z) \cos \alpha_k + T_k(x,z) \sin \alpha_k \qquad (5.2.2/15)$$

Bei der Berechnung der Charakteristiken der Eikonalgleichung (4.3.2/16) - (4.3.2/21) werden auch $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ und $\frac{\partial w}{\partial z}$ benötigt. Man erhält aus (5.2.2/14) und (5.2.2/15)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = + \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial T_k(x,z)}{\partial x} \cos \alpha_k - \frac{\partial N_k(x,z)}{\partial x} \sin \alpha_k \qquad (5.2.2/16)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = au_* \frac{1}{z + z_0} + \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial T_k(x,z)}{\partial z} \cos \alpha_k - \frac{\partial N_k(x,z)}{\partial z} \sin \alpha_k \qquad (5.2.2/17)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial N_k(x,z)}{\partial x} \cos \alpha_k + \frac{\partial T_k(x,z)}{\partial x} \sin \alpha_k \qquad (5.2.2/18)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial N_k(x,z)}{\partial z} \cos \alpha_k + \frac{\partial T_k(x,z)}{\partial z} \sin \alpha_k \qquad (5.2.2/19)$$

Wegen der Cauchy-Riemann'schen Bedingungen gilt:

$$\frac{\partial T_k}{\partial x} = - \frac{\partial N_k}{\partial z} \quad ; \quad \frac{\partial T_k}{\partial z} = \frac{\partial N_k}{\partial x}$$

Daher können alle Ableitungen in (5.2.2/16) - (5.2.2/19) durch T_k ausgedrückt werden:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\partial w}{\partial z} = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial T_k(x,z)}{\partial x} \cos \alpha_k - \frac{\partial T_k(x,z)}{\partial z} \sin \alpha_k \qquad (5.2.2/16)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = a u_* \frac{1}{z + z_0} + \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial T_k(x,z)}{\partial z} \cos \alpha_k + \frac{\partial T_k(x,z)}{\partial x} \sin \alpha_k \qquad (5.2.2/17)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial T_k(x,z)}{\partial z} \cos \alpha_k + \frac{\partial T_k(x,z)}{\partial x} \sin \alpha_k \qquad (5.2.2/18)$$

Aus (5.2.2/1) - (5.2.2/7) ergibt sich :

$$\frac{\partial T_k(x,z)}{\partial x} = \gamma_k \left(\frac{x - x_i}{a_k^2} - \frac{x - x_{i+1}}{b_k^2} \right) \qquad (5.2.2/19)$$

$$\frac{\partial T_k(x,z)}{\partial z} = \gamma_k \left(\frac{z - z_i}{a_k^2} - \frac{z - z_{i+1}}{b_k^2} \right) \qquad (5.2.2/20)$$

5.2.3 Numerische Ergebnisse der Strömungsfeldberechnung

Das Strömungsfeld kann mit dem in Kapitel 5.2.1 und 5.2.2 dargestellten Verfahren für beliebige Wallformen und Windprofile berechnet werden. In dem hier verwendeten Programm wird der Wall durch 128 Geradenstücke mit jeweils konstanter Quelldichte approximiert. Bei symmetrischen Wällen kann die Berechnung auf 64 Quelldichten nur einer Wallhälfte reduziert werden. Aus dem diskretisierten Wallverlauf und dem Geschwindigkeitsprofil des ungestörten Strömungsfeldes werden zunächst die Koeffizienten K_{jk} und v_{0gn} des 64 × 64 Gleichungssystemes (5.2.1/12) aus den Gleichungen (5.2.2/10), (5.2.2/7), (5.2.2/2) sowie (5.2.2/11) berechnet und das Gleichungssystem nach den unbekannten Quelldichten γ_k gelöst. Weil das hier gewählte Verfahren eine gute Konditionierung der Koeffizientenmatrix gewährleistet, kann die Lösung des linearen Gleichungssystemes mit Hilfe eines Laborrechners mit 32 bit Gleitkommawortlänge mit einem einfachen Gaußalgorithmus gefunden werden. Die 64 Quelldichten werden danach auf Magnetplatte abgespeichert. Die Berechnung der Quelldichten benötigt auf dem Laborrechner HP 21 MX etwa 5 Minuten Rechenzeit. Aus den 64 Quelldichten und dem ursprünglichen Windprofil wird dann mit Hilfe der Gleichungen (5.2.2/14), (5.2.2/15), (5.2.2/1) und (5.2.2/3) der Strömungsgeschwindigkeitsvektor an jedem Ort berechnet.

Die Stromlinien zeigen den Einflußbereich des Walles auf das Strömungsfeld und ermöglichen eine optische Kontrolle der Genauigkeit der Lösung, weil sie sich bei Annäherung an den Wall seinem Verlauf angleichen müssen. Ferner kann aus ihnen, wie in 4.1.3 gezeigt, bei Berücksichtigung von Temperatureinflüssen die lokale Schallgeschwindigkeit berechnet werden.

Aus den Strömungsgeschwindigkeitskomponenten $u(x,z)$ und $w(x,z)$ werden die Stromlinien numerisch aus der Lösung des folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungssystemes nach dem in Anhang 1 beschriebenen Prädiktor-Korrektor-Verfahren bestimmt:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{u(x,z)}{\sqrt{u^2(x,z) + w^2(x,z)}}$$

$$\frac{dz}{ds} = \frac{w(x,z)}{\sqrt{u^2(x,z) + w^2(x,z)}}$$

Die unabhängige Variable s ist die Bogenlänge der Stromlinie.

Die Bilder 5/9 und 5/1o zeigen die Stromlinienverläufe für zwei verschiedene Wälle und Windprofile

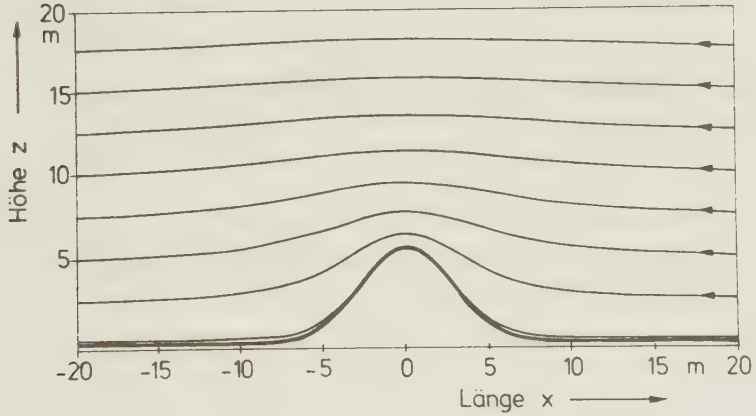

Bild 5/9: Stromlinienbild für einen breiten Lärmschutzwall, ungestörtes Feld: $u_g(z) = -0.79\ m/s\ \ln(\frac{z + 0.57cm}{0.57cm})$ Wallhöhe 5.69m

Die in Bild 5/9 dargestellten Bedingungen entsprechen DE JONG's 1 : 32 Modellmessungen im Windkanal. Den Bildern läßt sich entnehmen, daß das Strömungsfeld im gesamten dargestellten Bereich vom geschichteten Verlauf, bei dem die Stromlinien parallel zum Erdboden sind, abweicht. Bei Sender-Empfängerabständen von 4o m wie bei DE JONG kann das Strömungsfeld etwa über die Hälfte des Schallausbreitungsweges nicht als geschichtet angesehen werden.

Die Darstellung der Strömungsgeschwindigkeitskomponenten u und w ermöglicht es, den Einfluß des Walles auf die Strömungsgeschwindigkeit genauer zu erfassen. Die größten Strömungsgeschwindigkeiten

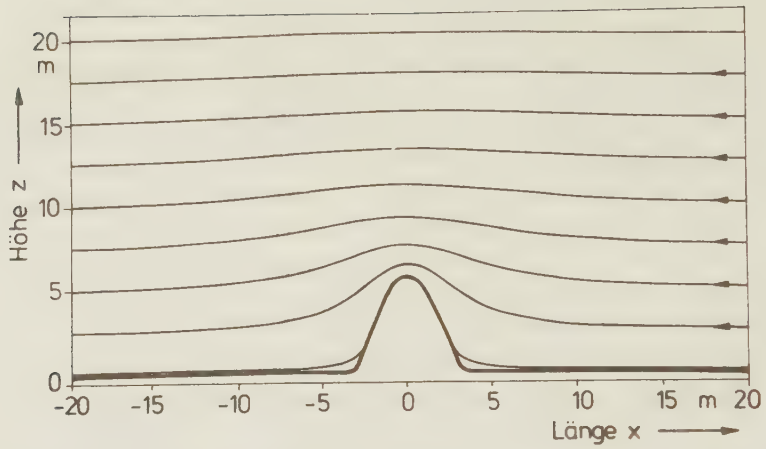

Bild 5/10: Stromlinienbild für einen schmalen Lärmschutzwall, ungestörtes Feld: $u_g(z) = -1.25\ m/s\ \ln(\frac{z + 3cm}{3cm})$ Wallhöhe: 6m

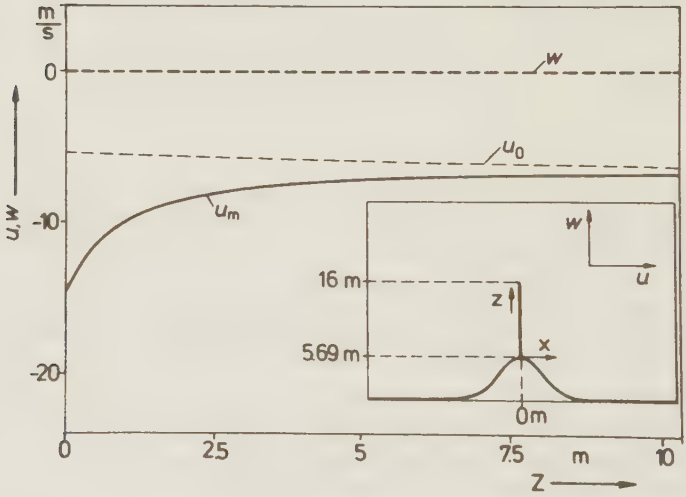

Bild 5/11: Strömungsgeschwindigkeit an der Wallspitze bis in 16 m Höhe über dem Erdboden. Daten wie bei Bild 5/9

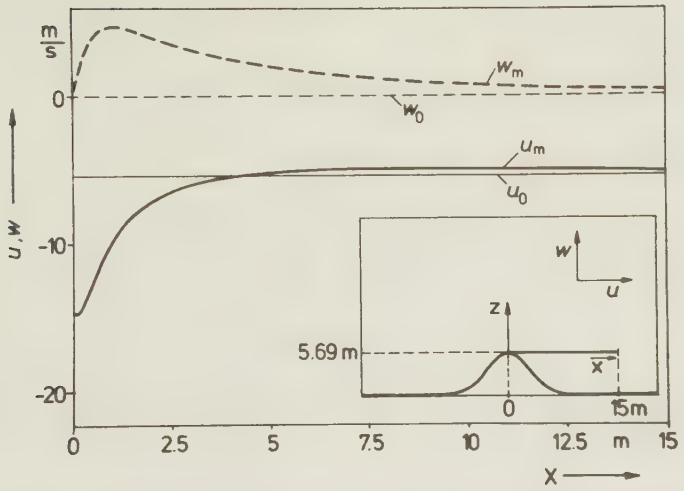

Bild 5/12: Strömungsgeschwindigkeit an der Wallspitze bis 15 m Abstand von der Wallspitze. Daten wie bei Bild 5/9

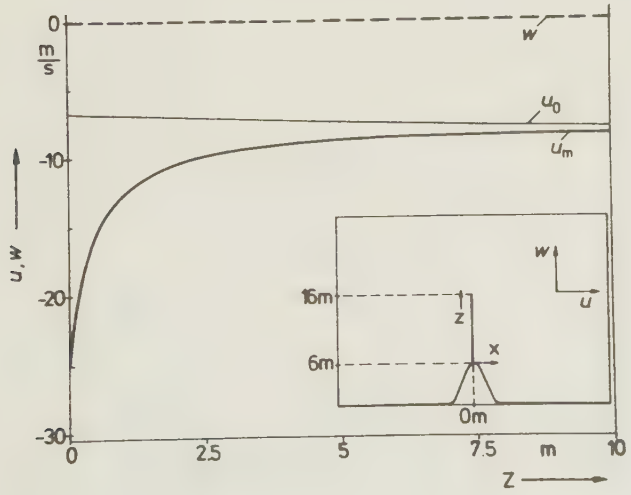

Bild 5/13: Strömungsgeschwindigkeit an der Wallspitze bis 16 m Höhe über dem Erdboden. Daten wie bei Bild 5/10

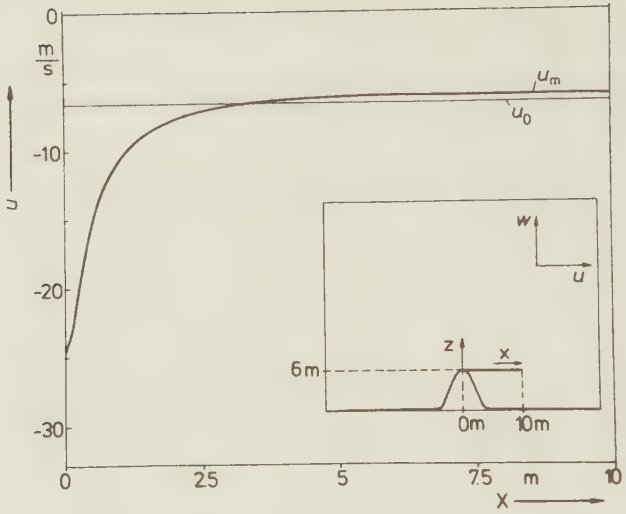

Bild 5/14: Strömungsgeschwindigkeitskomponente u an der Wallspitze bis 1o m Abstand von der Wallspitze. Daten wie bei Bild 5/1o.

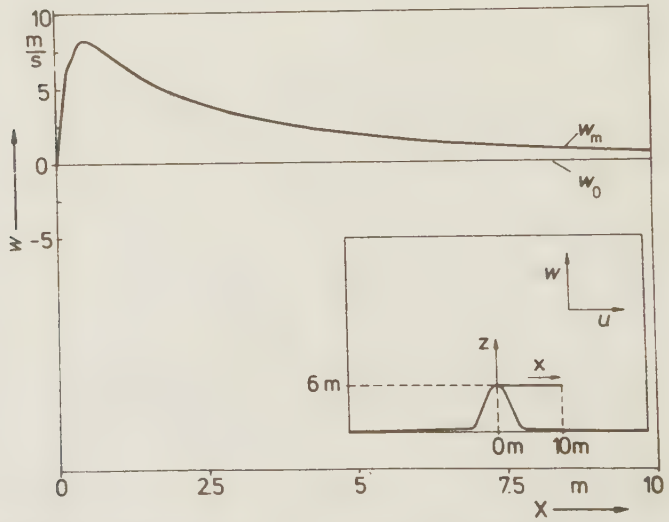

Bild 5/15: Strömungsgeschwindigkeitskomponente w an der Wallspitze bis 1o m Abstand von der Wallspitze. Daten wie bei Bild 5/1o

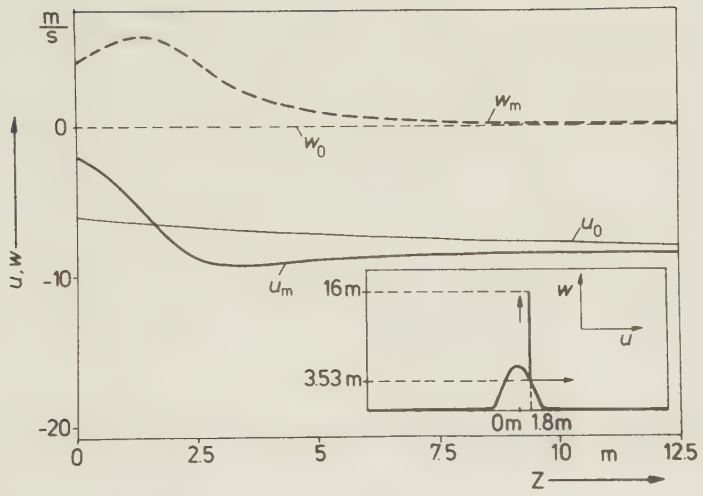

Bild 5/16: Strömungsgeschwindigkeit bei halber Wallhöhe bis 16 m über dem Erdboden. Daten wie bei Bild 5/1o

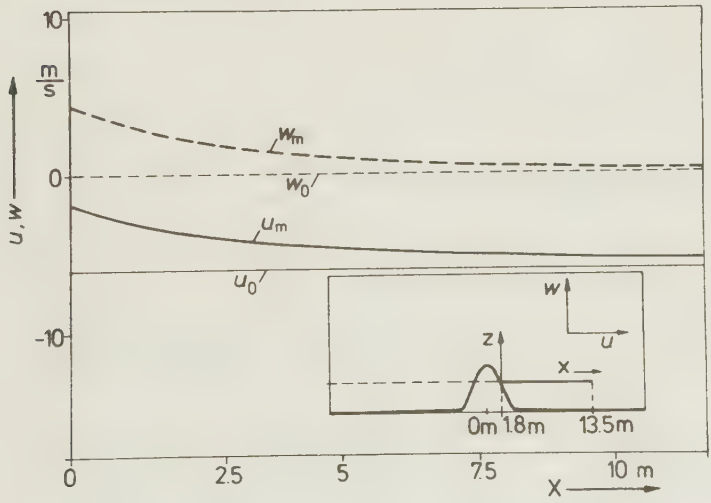

Bild 5/17: Strömungsgeschwindigkeit bei halber Wallhöhe bis 13 m Abstand von der Wallmitte.
Daten wie bei Bild 5/1o

traten erwartungsgemäß an der Wallspitze auf. Die Bilder 5/11 und 5/12 bzw. 5/13 - 5/15 zeigen die Verläufe von u und w an der Spitze der Wälle jeweils in Abhängigkeit von x und z für die in Bild 5/9 bzw. 5/10 dargestellten Bedingungen. Soweit sich die Verläufe unterscheiden, wird der Index $_0$ für das Strömungsfeld ohne Wall und der Index $_m$ für das Feld mit Wall verwendet.

Die Abweichung des Betrages der Strömungsgeschwindigkeit von dem des geschichteten Strömungsfeldes beträgt

$$\frac{\Delta|\vec{v}|}{|u_0|} = 1 - \frac{\sqrt{u_m^2 + w_m^2}}{|u_0|}$$

Für die Verläufe nach Bild 5/11 ergibt sich z. B. in 7.5 m Höhe über der Wallspitze

$$\frac{\Delta|\vec{v}|}{|u_0|} = 11.04\ \%$$

und für die Verläufe nach Bild 5/12 ergibt sich in 7.5 m Abstand zur Wallspitze

$$\frac{\Delta|\vec{v}|}{|u_0|} = 5.8\ \%$$

Für den schmalen Wall nach Bild 5/10 folgt aus den in Bild 5/13 dargestellten Verläufen:

$$\frac{\Delta|\vec{v}|}{|u_0|} = 11.4\ \%$$

in 7.5 m Höhe. Aus den Bildern 5/14 und 5/15 ergibt sich:

$$\frac{\Delta|\vec{v}|}{|u_0|} = 5\ \%$$

in 7.5 m Abstand.

Die Verläufe der Strömungsgeschwindigkeit in halber Wallhöhe werden in den Bildern 5/16 und 5/17, die in der Nähe des Erdbodens in 5/18 und 5/19 verdeutlicht.

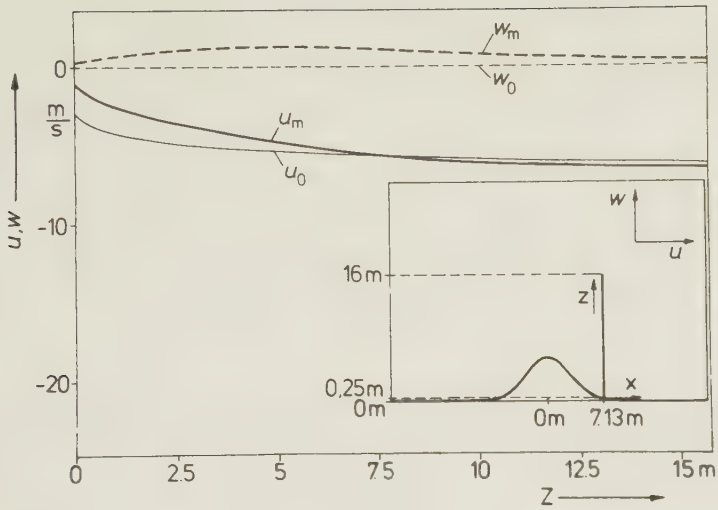

Bild 5/18: Strömungsgeschwindigkeit in Erdbodennähe bis 16 m über dem Erdboden. Daten wie bei Bild 5/9

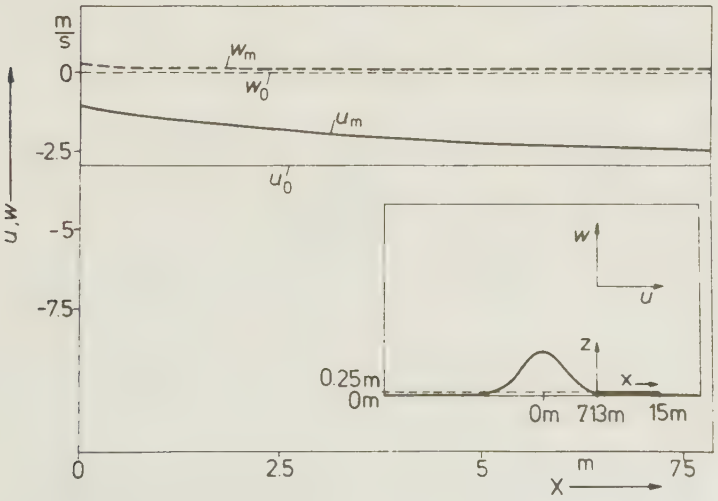

Bild 5/19: Strömungsgeschwindigkeit in Erdbodennähe bis 15 m Abstand von der Wallmitte. Daten wie bei Bild 5/9

Welche Genauigkeit läßt sich mit den hier gewählten Verfahren erreichen? Ein Maß für die Genauigkeit ist die Größe der Nomalkomponente der Strömungsgeschwindigkeit an der Walloberfläche, die im Idealfall gleich null wird. Hier müssen zwei Fehler unterschieden werden: Einerseits entsteht ein Fehler durch die Approximation des glatten Wallverlaufs durch endliche Anzahl von Geradenstücken. Er hängt stark von der Anzahl der Geradenstücke je Längeneinheit und der Krümmung der Randkurve ab und wird umso kleiner, je größer die Anzahl der Geradenstücke ist. Er soll hier Approximationsfehler genannt werden. Der Approximationsfehler wird in den Mittelpunkten der Geradenstücke am kleinsten, da hier das "point matching" durchgeführt wird.

Der andererseits hier auftretende Restfehler soll als Stabilitätsfehler bezeichnet werden. Er ist ein Maß für die Stabilität des gewählten Verfahrens. Mit ihm wird erfaßt, welche Fehler sich bei der Lösung des 64 × 64 Gleichungssystems durch Rechenfehler aufgrund der begrenzten Wortlänge ergeben. Verfahren zu finden, die einen geringen Stabilitätsfehler aufweisen, ist ein Hauptproblem für numerische Verfahren, die Randwertprobleme auf die Lösung großer linearer Gleichungssysteme zurückführen. Bild 5/2o zeigt den

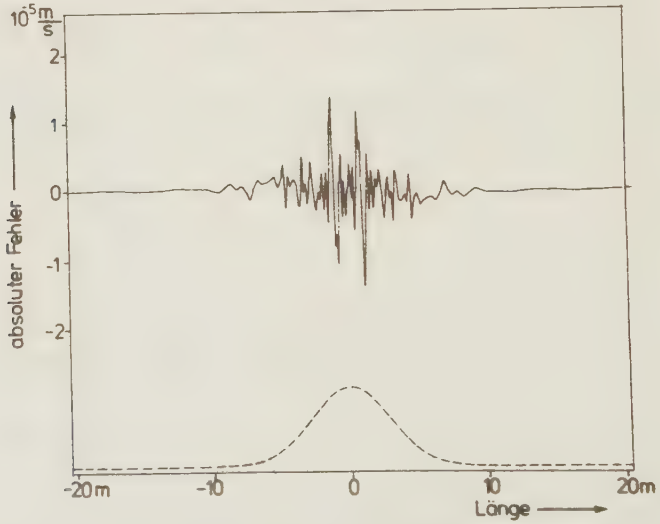

Bild 5/2o: Stabilitätsfehler. Daten wie bei Bild 5/ 9

Stabilitätsfehler für den Wall nach Bild 5/9. Er ist sehr gering und liegt im Bereich der letzten 2 signifikanten Stellen des hier verwendeten Minicomputers. Bild 5/21 zeigt den Approximationsfehler in den Wallpunkten. Er nimmt dort seinen maximalen Wert an. Mit der Annahme, daß die Randkurve des Walles im Wallpunkt i stetig ist, kann die Normalkomponente dort als:

$$\frac{\pi}{2} (\gamma_{j-1} + \gamma_j)$$

abgeschätzt werden. Für den Wall nach Bild 5/10 liegen die maximalen Fehler etwa um den Faktor 2 höher.

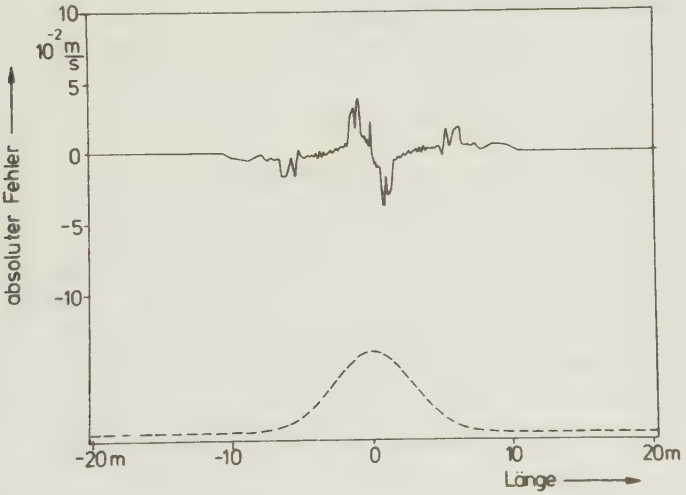

Bild 5/21: Approximationsfehler in den Wallpunkten
Daten wie bei Bild 5/9

Welche Bedeutung haben die Strömungsgeschwindigkeitsverläufe für die Genauigkeit der geometrisch-akustischen Näherungslösungen ?

Im Kapitel 4.3.1 wurde gezeigt,daß die Approximationsgüte der geometrisch-akustischen Gleichungen vom Verhältnis der örtlichen Strömungsgeschwindigkeitsableitungen zur Wellenlänge abhängt und direkt vom Betrag des skalierten Wellenvektors $\tilde{k}$ bestimmt wird. $\tilde{k}$ ergibt sich aus $\tilde{k} = \frac{2\pi}{\lambda_r} L_r$ und L_r ist ein Maß für die natürliche

Skala des Strömungsfeldes. Wesentliche Änderungen der Strömungsgeschwindigkeit sind über Entfernungen von L_r wirksam.

In welcher Größenordnung liegt L_r ?
L_r war dadurch definiert. daß die örtlichen Strömungsgeschwindigkeitsableitungen dividiert durch die lokale Strömungsgeschwindigkeit und multipliziert mit L_r gleich eins werden. In dem hier betrachteten Problem tritt aber nicht nur eine Längenskala auf, weil das mittlere Strömungsfeld der Atmosphäre, auch wenn es nicht durch ein Hindernis gestört ist, eine natürliche Längenskala L_{re} besitzt. Diese Skala wird durch das logarithmische Windprofil in der Nähe des Erdbodens nach Gleichung (2/11) hervorgerufen. Die Differentiation der Gleichung ergibt:

$$\frac{du}{dz} = \frac{au_*}{z} \qquad ; z >> z_0$$

Betrachtet man einen Bereich in der Nähe des Erdbodens, so kann $v_r = au_*$ gewählt werden, sodaß sich $L_{re} = z$ ergibt. Die natürliche Skala des Strömungsfeldes in der Nähe des Erdbodens ist daher die Höhe über dem Erdboden. Auch in der Nähe des Walles ist es - wie man aus Bild 5/18 entnimmt - diese Skala, die die stärksten Strömungsgeschwindigkeitsableitungen in Erdbodennähe hervorruft. Der Einfluß des Walles ist demgegenüber wesentlich geringer. Die maximalen Steigungen von u_0 und u_m betrugen 2.41/s und 2.99/s. Die Steigung von w_m ist sehr klein, w_m ist fast konstant.

In größerem Abstand vom Erdboden und in Wallnähe wird eine zweite Skala charakterisiert durch L_{rw} wirksam, die von der Störung des Strömungsfeldes durch das Hindernis hervorgerufen wird. Diese Störung ist an der Spitze der Wälle am größten, die natürliche Skala des geschichteten Strömungsfeldes demgegenüber vernachlässigbar klein. Die Steigungen von u_0 und w_0 in den Bildern 5/11 bis 5/15 sind gegenüber den Verläufen von u_m und w_m sehr klein.

Aus Bild 5/11 und 5/15 kann dann L_{rw} zu 1.6 m bzw. 1.4 m bestimmt werden, L_{rw} liegt also für die hier betrachteten Fälle in der Größenordnung 1 m. Mit $\tilde{k} \approx 0.1$ ergibt sich daraus eine untere Gültigkeitsgrenze der geometrischen akustischen Gleichungen in der Größenordnung 500 Hz für Senderabstände vom Erdboden > 1m.

5.3 Numerische Lösung von charakteristischen Gleichungssystemen am Beispiel der Eikonalgleichung und Ergebnisse

In diesem Abschnitt wird am Beispiel der Eikonalgleichung gezeigt, welche numerischen Methoden zur Verfügung stehen, um die charakteristischen Gleichungen im nichtkonstanten Strömungsfeld zu lösen. Die Lösung wird am Beispiel der Umströmung von Lärmschutzwällen vorgenommen. Weiterhin wird untersucht, ob der Einfluß des Walles auf das Strömungsfeld, wie von DE JONG unterstellt (vergl. S. 102) für den Verlauf der Charakteristiken vernachlässigt werden kann.

Die Verläufe der Charakteristiken der Eikonalgleichung sind durch die Gleichungen (4.3.2/16) - (4.3.2/21) gegeben. Für die bei DE JONG's Messungen im Windkanal vorliegenden Bedingungen können sie, wie auf Seite 105 beschrieben, vereinfacht werden. Werden ferner die Gleichungen für die dimensionsbehafteten Größen

$$c_0,\ u_0(x,z),\ w_0(x,z),\ \frac{\partial u_0(x,z)}{\partial x},\ \frac{\partial u_0(x,z)}{\partial z},\ \frac{\partial w_0(x,z)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial w_0(x,z)}{\partial z},\ x,\ z \text{ und } \tau$$

umgeschrieben, so erhält man

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{c_0 p_x}{\sqrt{p_x^2 + p_z^2}} + u_0 \qquad (5.3/1)$$

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{c_0 p_z}{\sqrt{p_x^2 + p_z^2}} + w_0 \qquad (5.3/2)$$

$$\frac{dp_x}{d\tau} = -\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} p_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} p_z\right) \qquad (5.3/3)$$

$$\frac{dp_z}{d\tau} = -\left(\frac{\partial u_0}{\partial z} p_x + \frac{\partial w_0}{\partial z} p_z\right) \qquad (5.3/4)$$

Die ortsabhängigen Strömungsfeldkoeffizienten

$$u_0,\ w_0,\ \frac{\partial u_0}{\partial x},\ \frac{\partial u_0}{\partial z},\ \frac{\partial w_0}{\partial x},\ \frac{\partial w_0}{\partial z}$$

wurden nach dem in Kapitel 5.2 beschriebenen Verfahren numerisch berechnet und eingesetzt. In allen graphischen Darstellungen wurden p_x und p_y so skaliert, daß

$$\sqrt{p_x^2(0) + p_z^2(0)} = 1$$

ist. Daraus ergeben sich

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x}(\tau) = \frac{p_x(\tau)}{\sqrt{p_x^2(0) + p_z^2(0)}} \qquad (5.3/5)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x}(\tau) = \frac{p_z(\tau)}{\sqrt{p_x^2(0) + p_z^2(0)}} \qquad (5.3/6)$$

Bei der Lösung dieses nichtlinearen gewöhnlichen Differentialgleichungssystemes hat sich das Prädiktor-Korrektor-Verfahren (siehe Anhang 1) als vorteilhaft herausgestellt, weil es je Integrationsschritt nur eine zweimalige Berechnung der Strömungsfeldkoeffizienten erfordert und sich als numerisch stabil erwiesen hat. Jeder Integrationsschritt benötigt auf dem hier verwendeten Rechner HP 21 MX ca 1/2 Sekunde Rechenzeit.

Bild 5/22 zeigt ein Beispiel für die Stabilität des Verfahrens. Es wurde der Verlauf der Charakteristiken für streifenden Schalleinfall, bei dem die Charakteristik den Bereich an der Spitze des schmalen Walles mit seinen besonders großen örtlichen Ableitungen der Strömungsgeschwindigkeit durchläuft, berechnet. In diesem Beispiel betrug die Anzahl der Integrationsschritte für τ einmal 93, das andere Mal 186. Der Unterschied im Verlauf der Charakteristiken liegt unterhalb der Zeichengenauigkeit. Beide Verläufe sind optisch nicht unterscheidbar als stark ausgezogene Kurven dargestellt. Um den gebogenen Verlauf der Charakteristiken besser sichtbar zu machen, ist zum Vergleich dünn ausgezogen eine Gerade mit gleicher Anfangssteigung dargestellt. Die maximalen absoluten Abweichungen betrugen:

$$|x_{186} - x_{93}| = 8 \cdot 10^{-3}\text{m} \quad \text{und} \quad |z_{186} - z_{93}| = 2.9 \cdot 10^{-2}\text{m}$$

Im weiteren wurde eine Anzahl von 100 Integrationsschritten für die

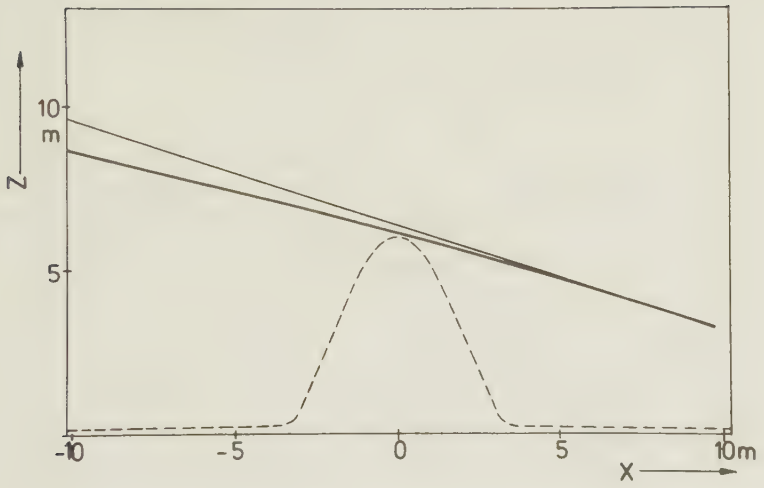

Bild 5/22 : Beispiel für den Charakteristikenverlauf und die Stabilität des Prädiktor-Korrektor-Verfahrens;
dick : Charakteristikenverläufe,
dünn : Gerade
Wall wie in Bild 5/1o
$u_g(z) = - 3.75$ m/s ln $(\frac{z + 3cm}{3cm})$

Schallausbreitung als ausreichend angesehen. Für größere Entfernungen wurde die Anzahl der Integrationsschritte proportional zur Entfernung erhöht, sodaß die Schrittweite $\Delta\tau$ konstant blieb.

Wie auf Seite 102 dargestellt, nahm DE JONG an, daß die Abweichung des Strömungsfeldes vom geschichteten Verlauf in der Umgebung des Walles für den Verlauf der Charakteristiken der Eikonalgleichung nicht berücksichtigt zu werden braucht. Es soll nun untersucht werden, ob diese Annahme zutreffend ist. Dazu werden die Verläufe der Charakteristiken und die Komponenten des normierten Wellenvektors $\frac{\partial\sigma}{\partial x}$, $\frac{\partial\sigma}{\partial z}$ im homogenen Medium (kein Geschwindigkeitsfeld, konstante Temperatur) und deren Verlauf im Strömungsfeld berechnet. Ferner werden bei sonst gleichen Bedingungen die Charakteristiken berechnet, die sich unter der Annahme des geschichteten Geschwin-

digkeitsfeldes ergeben. Vergleicht man die drei Kurven, so ist DE JONG's Annahme nur dann zutreffend, wenn die Abweichungen in den Charakteristiken zwischen dem Verlauf im geschichteten und dem im nicht geschichteten Feld hinreichend klein sind gegenüber den Abweichungen vom Verlauf im homogenen Medium.

Es wurden die Charakteristiken für zwei unterschiedliche Anordnungen berechnet. Die Anordnung 1 entspricht den Strömungsfeldbedingungen, die von DE JONG im Windkanal simuliert wurden: Der breite Wall nach Bild 5/9 im Strömungsfeld, dessen geschichteter Verlauf durch

$$u_g = - 2.37 \text{ m/s } \ln \left(\frac{z + 0.57\text{cm}}{0.57\text{cm}}\right)$$

gegeben ist. Die Strömungsgeschwindigkeit in 1.6 m Höhe beträgt dann 13.3 m/s. Im Vergleich dazu wurde in der Anordnung 2 ein Strömungsfeld gewählt, das sich über rauherem Gelände ergibt. Die Rauhigkeitslänge beträgt hier 3 cm und liegt im mittleren Bereich der Werte, die von DAVENPORT (1965) für flaches, offenes Land angegeben wurden. Die Schubspannungsgeschwindigkeit beträgt $u_* = - 1.5$m und es wurde der schmale Wall nach Bild 5/10 untersucht.

Nach DE JONG's Hypothese sind die Charakteristiken vom Sender und Empfänger tangential zum Wall interessant: Sie bestimmen die Brechung des Wellenvektors, dessen x- und z-Komponente sich aus der örtlichen Ableitung der Phasenfunktion in dimensionsloser Schreibweise zu $\frac{\partial\sigma}{\partial x}$, $\frac{\partial\sigma}{\partial z}$ ergeben. Zunächst wurde der Verlauf der Charakteristiken von DE JONG's Senderstandort jeweils für streifenden Schalleinfall (Abstand zum Wall 3 cm) untersucht. Der Sender befindet sich in einer Entfernung von $x = 9.76$ m und einer Höhe von $z = 3.26$ m relativ zur Projektion der Wallspitze auf den Erdboden. Bild 5/23 und Bild 5/24 zeigen die Verläufe der Charakteristiken für die Anordnung 1 bzw. für die Anordnung 2 im Vergleich zum Verlauf im homogenen und als geschichtet angenommenen Strömungsfeld. In beiden Fällen sieht man, daß die Abweichung der Charakteristik vom Verlauf im geschichteten Strömungsfeld in gleicher Größenordnung liegt wie die Abweichung, die das als geschichtet angenommene Strömungsfeld gegenüber dem homogenen Medium hervorruft. Wegen der relativ geringen Abweichung ist eine Darstellung günstiger, bei der die Abweichungen der x- und der z-Komponente der Charakteristik vom Verlauf der entsprechenden Komponenten im homogenen Medium als Funktion der Gruppenlaufzeit τ aufgetragen

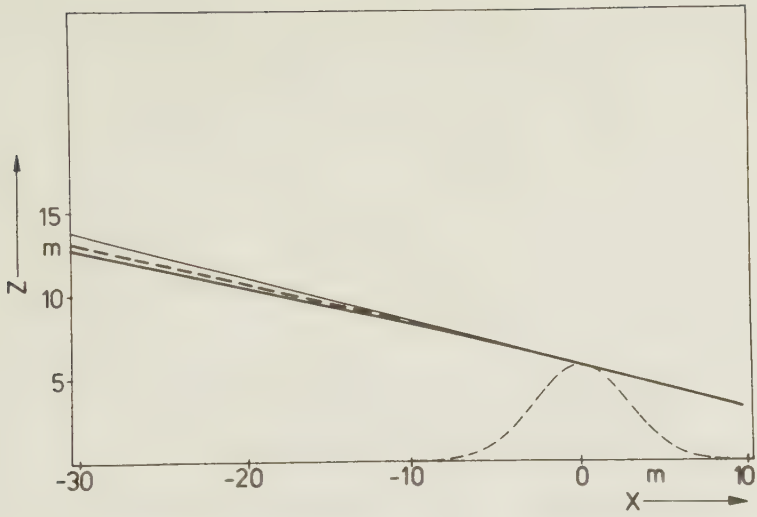

Bild 5/23 : Verlauf der Charakteristik für streifenden Schalleinfall und Mitwind in Anordnung 1 im Vergleich zum Verlauf im homogenen Medium (dünn) und als geschichtet angenommenen Strömungsfeld (gestrichelt);
Senderort: $x_s = 3.26$ m, $z_s = 9.76$ m

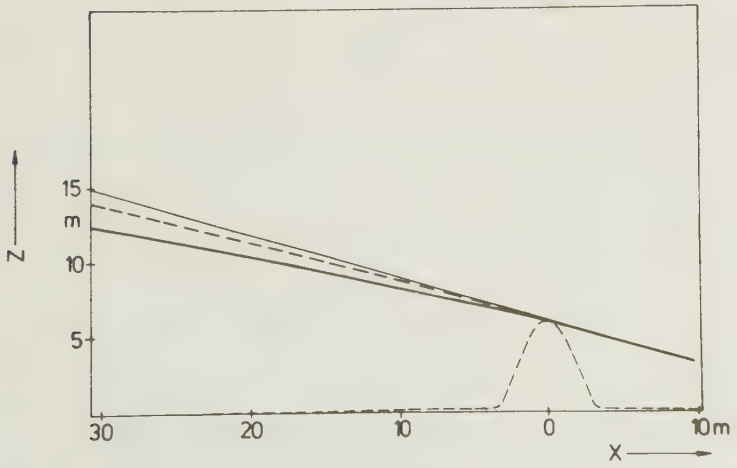

Bild 5/24 : Anordnung 2, übrige Daten wie Bild 5/23

sind. Bild 5/25 zeigt die Verläufe von Bild 5/23 und Bild 5/26 die von Bild 5/24 in dieser Form. Die dargestellten Größen sind:

$$x(\tau) = x_g(\tau) - x_h(\tau)$$

$$z(\tau) = z_g(\tau) - z_h(\tau)$$

$$x_w(\tau) = x_w(\tau) - x_h(\tau)$$

$$z_w(\tau) = z_w(\tau) - z_h(\tau)$$

mit x_g , z_g Koordinaten im geschichtet angenommenen Strömungsgeschwindigkeitsfeld,

x_h , z_h Koordinaten im homogenen Medium

x_w , z_w Koordinaten im Strömungsgeschwindigkeitsfeld

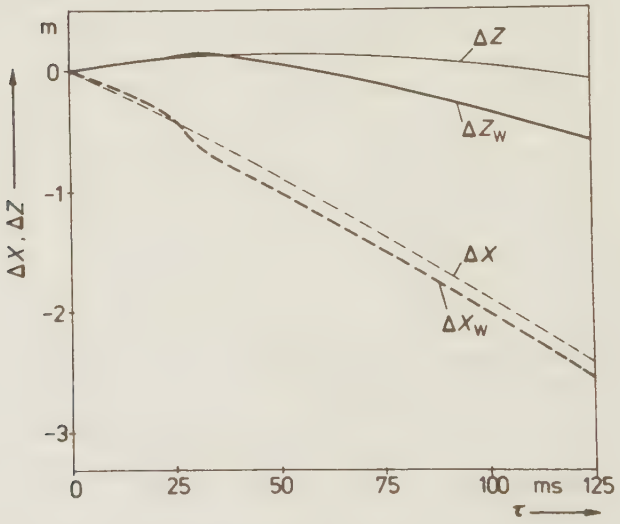

Bild 5/25 : Abweichung der Charakteristiken vom Verlauf im homogenen Medium als Funktion der Gruppenlaufzeit für die in Bild 5/23 dargestellten Charakteristiken (Mitwind)

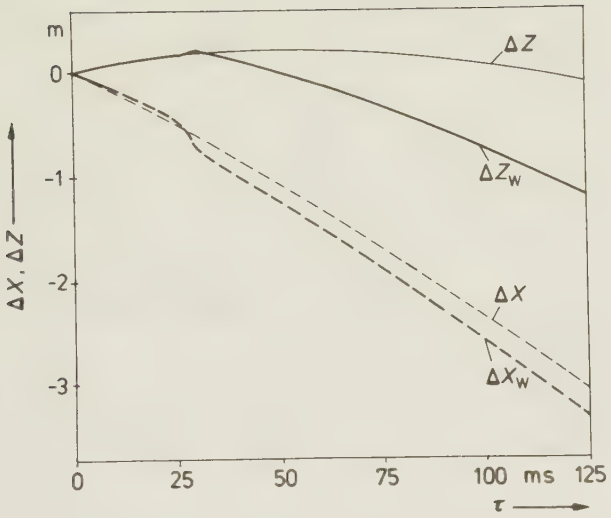

Bild 5/26 : Abweichung der Charakteristiken vom Verlauf im homogenen Medium als Funktion der Gruppenlaufzeit für die in Bild 5/24 dargestellten Charakteristiken (Mitwind)

In beiden Fällen wird deutlich, daß die stärksten Abweichungen vom Verlauf im homogenen Medium in einem kleinen Bereich in der Umgebung des Walles bei $\tau = 25$ ms auftreten, der Verlauf der Charakteristiken also sehr stark vom nichtgeschichteten Verlauf des Geschwindigkeitsfeldes infolge des Walleinflusses auf das Strömungsfeld abhängt. Dies kann auch am Verlauf von $\frac{\partial \sigma}{\partial x}$ und $\frac{\partial \sigma}{\partial z}$, der x- bzw. z-Komponente des normierten Wellenvektors gesehen werden. Der Verlauf dieser Größen in der Umgebung des Walles entlang der in Bild 5/23 dargestellten Charakteristiken ist in Bild 5/27 und Bild 5/28 dargestellt.

Bild 5/29 und 5/3o zeigen die entsprechenden Kurven für die in Bild 5/24 dargestellten Charakteristiken. In diesem Fall sind die Abweichungen stärker, aber auf einen kleineren Bereich beschränkt.

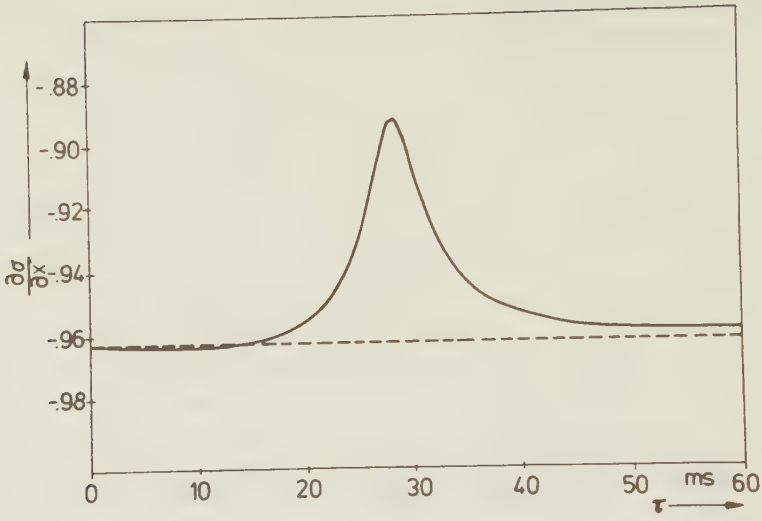

Bild 5/27 : Verlauf der x-Komponente des normierten Wellenvektors als Funktion der Gruppenlaufzeit für die in Bild 5/23 dargestellten Charakteristiken;
dick: Strömungsfeld
gestrichelt: als geschichtet angenommenes Strömungsfeld

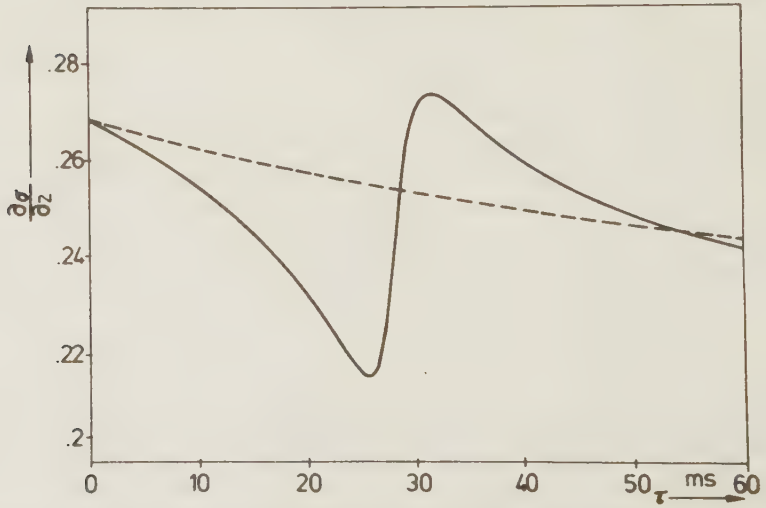

Bild 5/28 : Verlauf der z-Komponente des normierten Wellenvektors, Darstellung wie in Bild 5/27

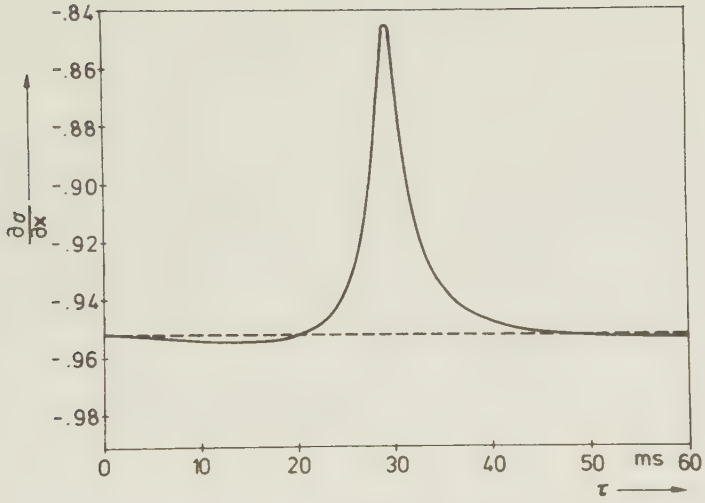

Bild 5/29 : Verlauf der x-Komponente des normierten Wellenvektors als Funktion der Gruppenlaufzeit für die in Bild 5/24 dargestellten Charakteristiken;
dick: Strömungsfeld
gestrichelt: als geschichtet angenommenes Strömungsfeld

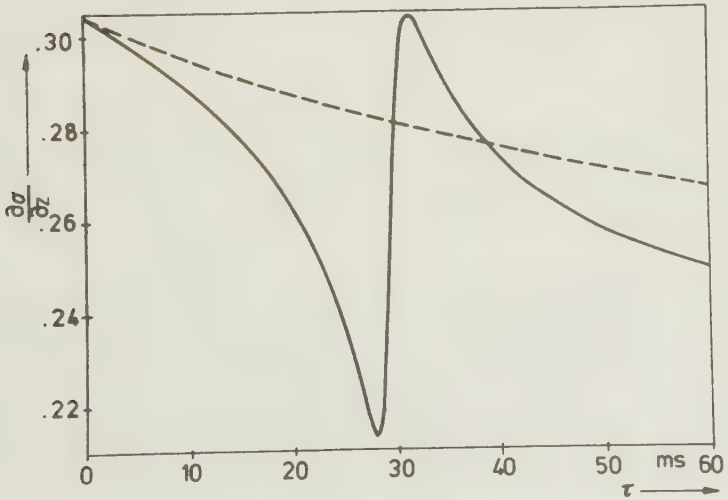

Bild 5/3o : Verlauf der z-Komponente des normierten Wellenvektors, Darstellung wie in Bild 5/29

Aus den in den Bildern 5/23 - 5/3o dargestellten Verläufen kann geschlossen werden, daß in diesen Fällen der Einfluß des nichtgeschichteten Strömungsgeschwindigkeitsfeldes in der Umgebung des Walles nicht vernachlässigt werden kann.

Es stellt sich nun die Frage, bis zu welchem Abstand vom Wall die Störung des geschichteten Strömungsfeldes den Verlauf der Charakteristiken beeinflußt. Da die größten Abweichungen der Charakteristiken in der Anordnung 2 auftraten, wurde dieser Fall dargestellt. In Bild 5/31 ist der Verlauf der Charakteristik im Abstand von 6o cm vom Wall dargestellt.

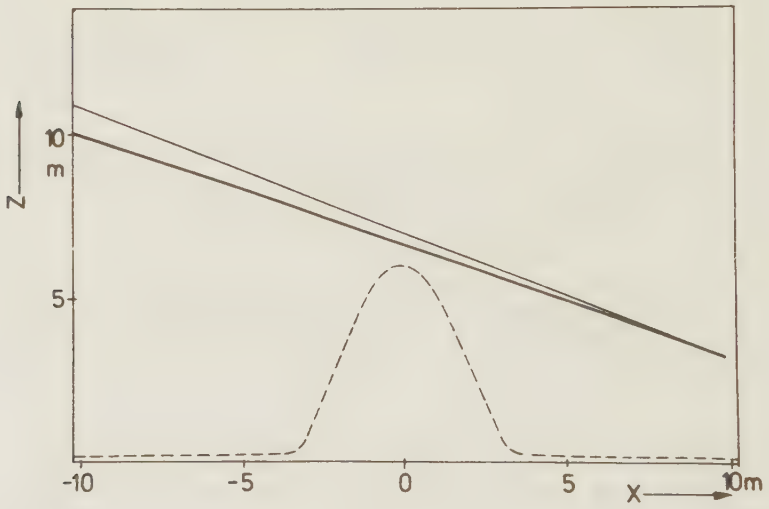

Bild 5/31 : Beispiel für den Einflußbereich des nichtgeschichteten Feldes auf den Verlauf der Charakteristik;
dick : Verläufe im geschichteten und im nichtgeschichteten Strömungsfeld,
dünn : Verlauf im homogenen Medium für die gleiche Anfangssteigerung

Die Verläufe im als geschichtet angenommenen Strömungsfeld und im gestörten Feld sind optisch nicht zu unterscheiden. Die Abweichun-

gen beider Verläufe betragen maximal 16 cm; Die dünne Kurve zeigt im Vergleich den Verlauf im homogenen Medium für den gleichen Anfangswert des normierten Wellenvektors. In Kapitel 5.2.3 wurde gezeigt, daß in den hier untersuchten Beispielen die Strömungsgeschwindigkeit bis 7.5 m Entfernung zum Wall vom geschichteten Verlauf merklich abweicht (um bis zu 11,4 %). Der Einfluß, den die Störung des geschichteten Feldes auf die Charakteristiken ausübt, ist dagegen auf eine wesentlich kleinere Umgebung des Walles beschränkt. In 6o cm Abstand vom Wall ist dieser Einfluß unter den ungünstigsten hier untersuchten Bedingungen, bei der größten Strömungsgeschwindigkeit und bei der stärksten Änderung der Geschwindigkeit, praktisch nicht mehr wirksam. Gleichwohl ist die Wirkung des Strömungsfeldes in diesem kleinen Bereich so stark, daß der gesamte Verlauf der Charakteristik von ihm entscheidend beeinflußt wird.

Nachdem untersucht wurde, welche Wirkung das nichtgeschichtete Strömungsfeld auf die Charakteristiken vom Sender zum Wall hat, wird nun auch der Einfluß auf die Charakteristiken vom Wall zum Empfänger dargestellt, die nach DE JONG's Vorstellung ebenfalls eine große Bedeutung für die Windminderung haben. Es werden die Charakteristiken tangential von der Wallspitze im homogenen Medium, im geschichteten und im nichtgeschichteten Strömungsfeld verglichen. Die Anfangssteigung bei allen Charakteristiken war jeweils die gleiche. Sie wurde so gewählt, daß die Charakteristik im homogenen Medium durch den DE JONG's Messungen entsprechenden Empfängerort in $x = 29.28$ m Entfernung und $z = 3.26$ m Höhe relativ zur Projektion der Wallspitze auf den Erdboden verläuft. Bild 5/ und Bild 5/33 zeigen die Verläufe der Charakteristiken für Mit- bzw. Gegenwind bei der Anordnung 2, bei der der Strömungsfeldeinfluß am stärksten war.

Den Bildern 5/34 und 5/35 können die Abweichungen der Charakteristiken vom Verlauf im homogenen Medium entnommen werden. Ein Vergleich von Bild 5/34 und 5/35 zeigt, daß die Wirkung des nichtgeschichteten Strömungsgeschwindigkeitsfeldes in der Umgebung des Walles auf den Verlauf der Charakteristik bei Gegenwind wesentlich kleiner ist als bei Mitwind.

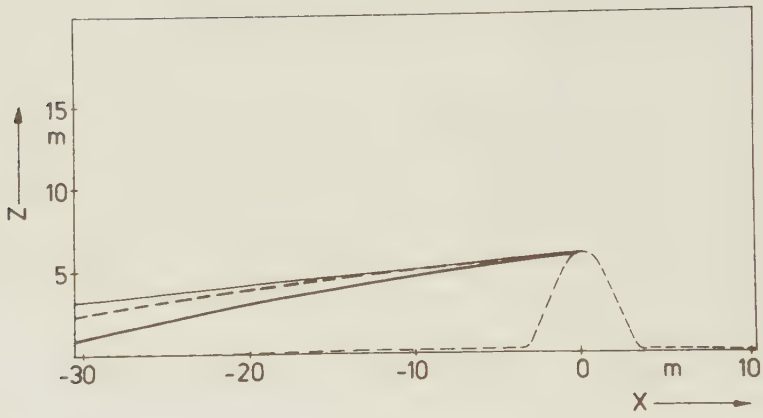

Bild 5/32: Verlauf der Charakteristik in Anordnung 2 bei Mitwind im Vergleich zum Verlauf im homogenen Medium (dünn) und als geschichtet angenommenen Strömungsfeld (gestrichelt)

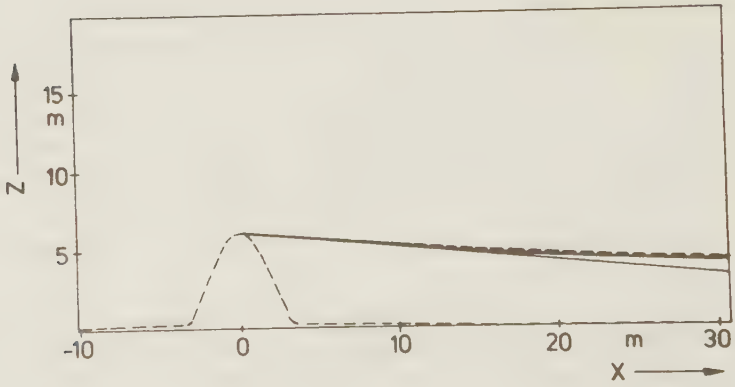

Bild 5/33: Verlauf der Charakteristik in Anordnung 2 bei Gegenwind, Erläuterungen wie Bild 5/32

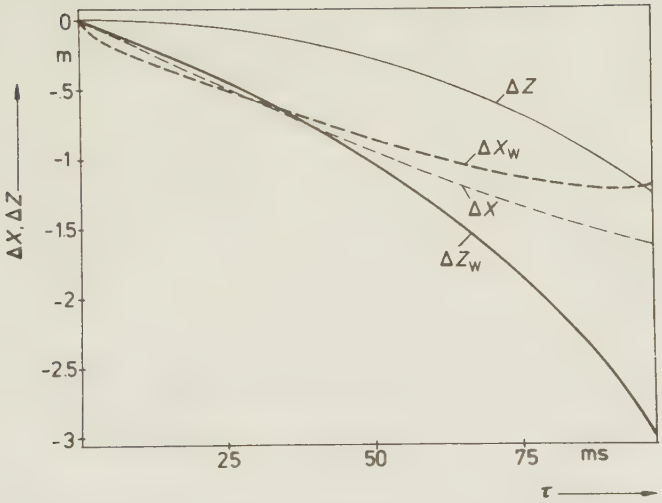

Bild 5/34 : Abweichung der Charakteristiken vom Verlauf im homogenen Medium als Funktion der Gruppenlaufzeit für die in Bild 5/32 dargestellten Charakteristiken (Mitwind)

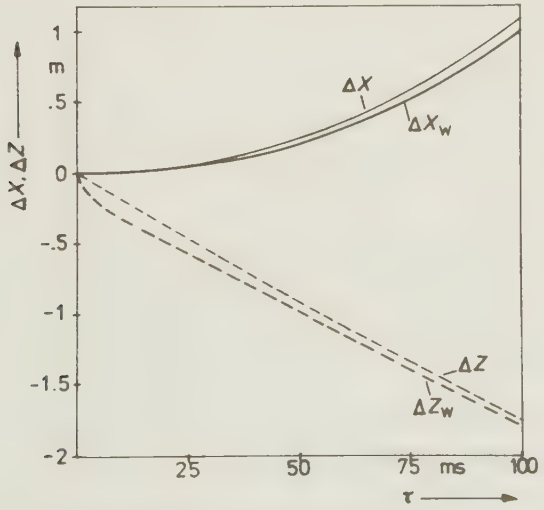

Bild 5/35 : Abweichung der Charakteristiken vom Verlauf im homogenen Medium als Funktion der Gruppenalufzeit für die in Bild 5/33 dargestellten Charakteristiken (Gegenwind)

Bild 5/36 zeigt den Verlauf der Charakteristiken für die Anordnung 1 bei Mitwind. Auf die Darstellung der entsprechenden Charakteristikenverläufe bei Gegenwind wird aus graphischen Gründen verzichtet.

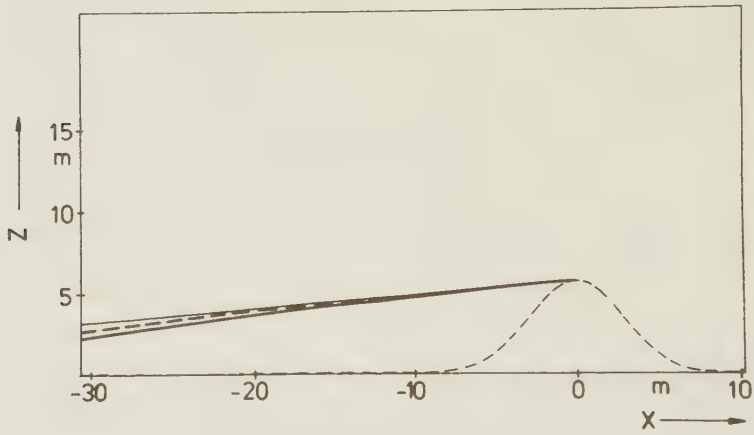

Bild 5/36 : Verlauf der Charakteristik in Anordnung 1 bei Mitwind im Vergleich zum Verlauf im homogenen Medium (dünn) und im als geschichtet angenommenen Strömungsgeschwindigkeitsfeld (gestrichelt)

Bild 5/37 zeigt die Abweichungen der Charakteristikenverläufe von denen im homogenen Medium für die Charakteristiken in Bild 5/36. Die zugehörigen Verläufe der x- und z-Komponente des normierten Wellenvektors können den Bildern 5/38 und 5/39 entnommen werden.

Die Bilder 5/4o - 5/42 zeigen die 5/37 - 5/39 entsprechenden Verläufe für die Anordnung 2 bei Gegenwind.

Für die Anordnung 1 sind die Abweichungen der Charakteristiken insgesamt geringer als für die Anordnung 2. Auch hier zeigt sich, daß der Einfluß durch das nichtgeschichtete Strömungsfeld bei Mitwind größer ist als bei Gegenwind. Den Verläufen der Komponenten des Wellenvektors kann entnommen werden, daß die wesentlichen Änderun-

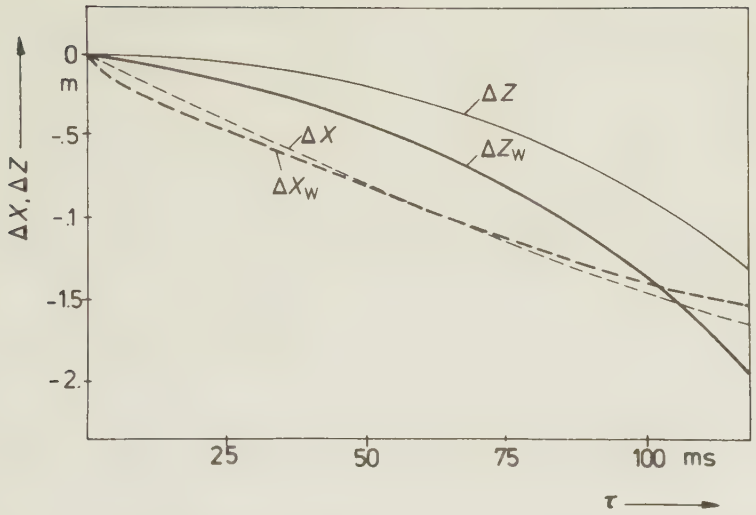

Bild 5/37 : Abweichung der Charakteristiken vom Verlauf im homogenen Medium als Funktion der Gruppenlaufzeit für die in Bild 5/36 dargestellten Charakteristiken (Mitwind)

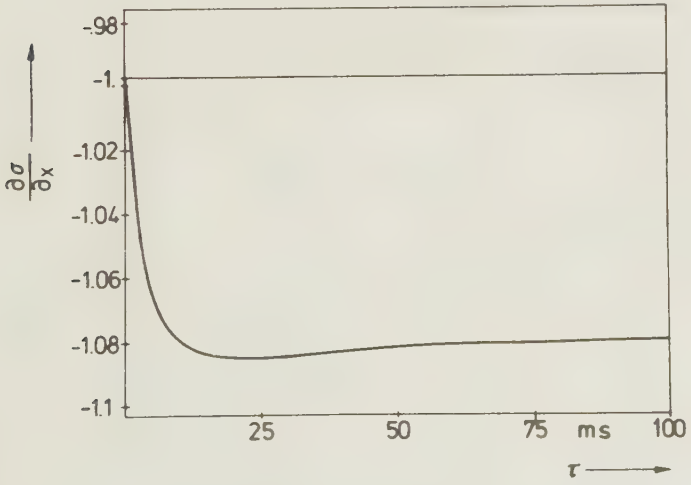

Bild 5/38 : Verlauf der x-Komponente des normierten Wellenvektors als Funktion der Gruppenlaufzeit für die in Bild 5/36 dargestellten Charakteristiken; dick : Strömungsfeld; dünn: als geschichtet angenommenes Strömungsfeld

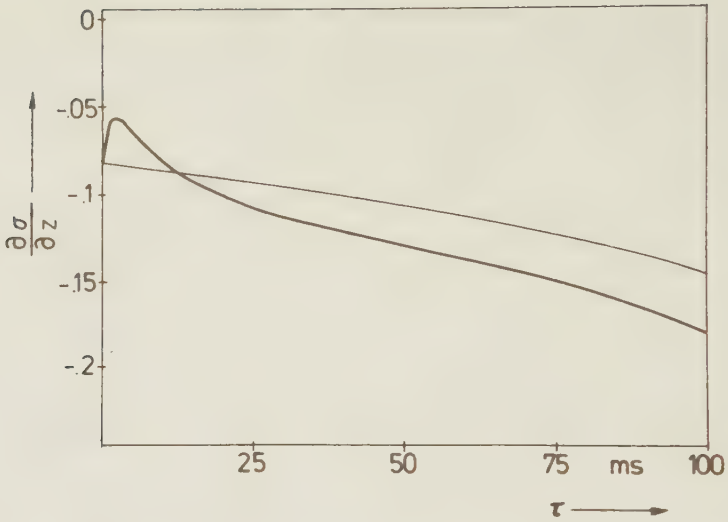

Bild 5/39 : Verlauf der z-Komponente des normierten Wellenvektors als Funktion der Gruppenlaufzeit für die in Bild 5/36 dargestellten Charakteristiken;
dick: Strömungsgeschwindigkeitsfeld;
dünn: als geschichtet angenommenes Strömungsfeld

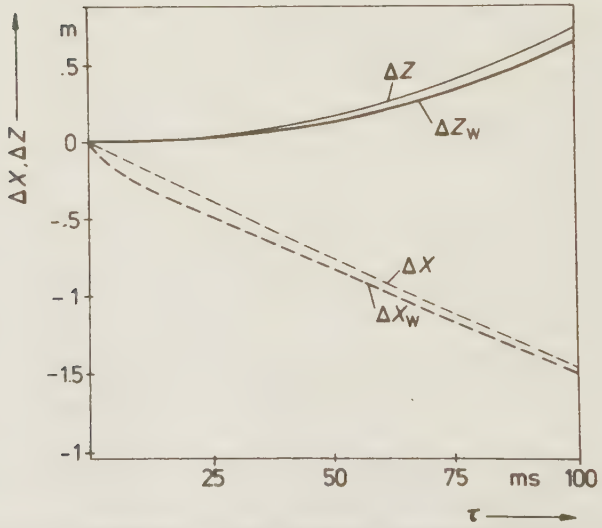

Bild 5/4o : Abweichung der Charakteristiken vom Verlauf im homogenen Medium als Funktion der Gruppenlaufzeit für die Anordnung 1 bei Gegenwind

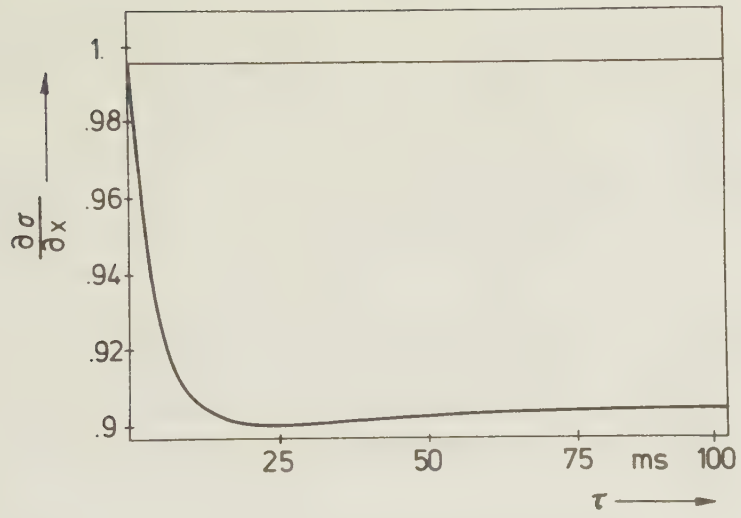

Bild 5/41 : Verlauf der x-Komponente des normierten Wellenvektors als Funktion der Gruppenlaufzeit für die Anordnung 1 bei Gegenwind; dick: Strömungsgeschwindigkeitsfeld; dünn: als geschichtet angenommenes Strömungsfeld

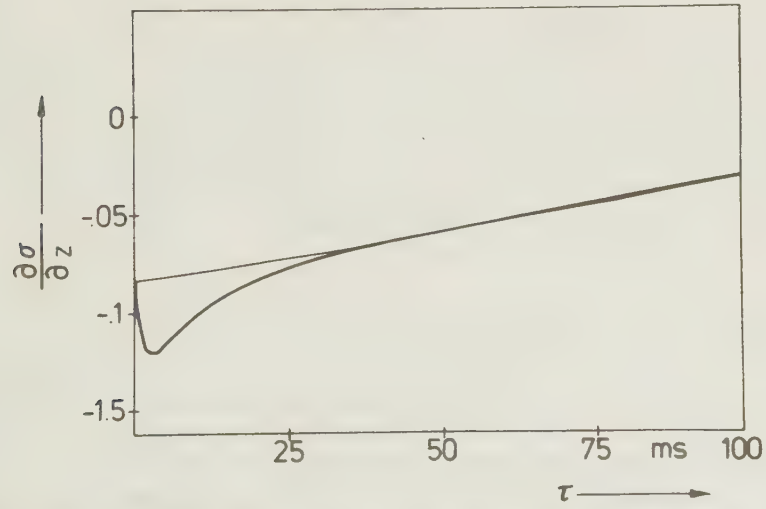

Bild 5/42 : Verlauf der z-Komponente des normierten Wellenvektors, übrige Daten wie in Bild 5/41

gen der Ausbreitungsrichtung der Welle in unmittelbarer Umgebung des Walles auftreten. Die stärksten Einflüsse treten in einem Bereich von 1o m s entsprechend etwa 3 m Entfernung zum Wall auf.

In diesem Kapitel konnte gezeigt werden, daß der Einfluß des nichtgeschichteten Strömungsfeldes auf den Verlauf der Charakteristiken bis ca 3o m Entfernung zum Wall mit Ausnahme der Schallausbreitung annähernd parallel zum Erdboden für Gegenwind nicht vernachlässigt werden darf. Dieser Einfluß für die hier untersuchten Bedingungen ist auf kleine Abstände zum Wall (6o cm) beschränkt. Gleichwohl werden die Charakteristiken in ihrem gesamten Verlauf in diesem kleinen Bereich so stark beeinflußt, daß dieser Einfluß im allgemeinen nicht vernachlässigt werden kann. Für den Wellenvektor ist dieser Einflußbereich größer und reicht bis ca 3 m Abstand vom Wall.

Aus Kapitel 5.2.3 geht hervor, daß der Einfluß des nichtgeschichteten Strömungsgeschwindigkeitsfeldes auf die Charakteristiken der Transportgleichung größer ist als auf die der Eikonalgleichung, sodaß die hier gemachten Aussagen für die Berechnung des Schalldruckes nach den Gleichungen 4.3.3/17 und 4.3.3/2o - 4.3.3/23 umso mehr gelten. Da die Einflüsse des nichtgeschichteten Feldes auf einen relativ kleinen Bereich in der Umgebung des Walles beschränkt sind, ist eine numerische Lösung der Transportgleichung an dieser Stelle nicht sinnvoll: Um den Schalldruck am Empfängerort berechnen zu können, muß vorher die GTD auf den hier untersuchten Fall der Wellenausbreitung im nichtkonstanten, drehbehafteten Strömungsfeld erweitert werden, um auch den Einfluß des Strömungsfeldes auf die Wellenausbreitung der Kaustik erfassen zu können.

6 Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird ein theoretisches Modell für die akustische Wellenausbreitung im nichtkonstanten Strömungsgeschwindigkeitsfeld mit Hilfe von asymptotischen mathematischen Methoden entwickelt. Dieses Modell eignet sich u. a. dazu, die Schallausbreitung bei Wind- und Temperatureinfluß in der Atmosphäre zu berechnen.

Im ersten Teil der Arbeit wurden die Eigenschaften des Strömungsgeschwindigkeitsfeldes in der Oberflächenschicht der Atmosphäre (bis ca 3o m Höhe) untersucht. Es stellte sich heraus, daß das mittlere Strömungsfeld der Atmosphäre über ebenem, rauhem Erdboden durch eine zeitinvariante, inkompressible und geschichtete Scherströmung beschrieben werden kann, die für viele meteorologische Bedingungen lediglich von zwei Skalen bestimmt wird, die durch die Rauhigkeitslänge und die Richardson-Zahl gegeben sind. Die Rauhigkeitslänge bestimmt das Windprofil für die adiabatisch geschichtete Atmosphäre, bei der die Strömungsgeschwindigkeit logarithmisch mit der Höhe über dem Erdboden zunimmt. Die Richardson-Zahl ist ein Maß für die Abweichung des Wind- und Temperaturprofiles unter instabilen und schwach stabilen meteorologischen Bedingungen. Die Skalierungsgesetze machen es möglich, den genauen Verlauf des Temperatur- und Strömungsgeschwindigkeitsprofiles ohne großen experimentellen Aufwand aus jeweils nur zwei Messungen der Temperatur und Strömungsgeschwindigkeit in verschiedenen Höhen zu rekonstruieren. Wird diese Scherströmung durch ein Hindernis gestört, das sehr viel größer als die Rauhigkeitslänge ist, so entsteht ein nicht geschichtetes Strömungsgeschwindigkeitsfeld.

Die allgemeinen Gleichungen für die akustische Wellenausbreitung in einem solchen Strömungsfeld wurden bisher einfach durch Linearisierung der gasdynamischen Gleichungen um den durch das Geschwindigkeitsfeld gegebenen Zustand gewonnen. Dabei wurde nicht beachtet, daß es wegen des nichtlinearen Charakters der gasdynamischen Grundgleichungen zu einer Wechselwirkung zwischen der Strömung und der akustischen Welle kommt. Für akustische Anwendungen ist lediglich der Einfluß des Strömungsgeschwindigkeits- und Temperaturfeldes auf die Schallausbreitung von Interesse. In dieser Arbeit wird gezeigt, daß Störungsrechnungsmethoden es erlauben, die Wirkung des

Geschwindigkeits- und Temperaturfeldes auf die akustische Wellenausbreitung systematischer zu erfassen. Es werden allgemeine strömungsmechanische und akustische Gleichungen für die Schallausbreiim Strömungsgeschwindigkeitsfeld niedriger Strömungsgeschwindigkeit (kleiner Mach-Zahl) hergeleitet. Die neuen asymptotischen Gleichungen weisen gegenüber den bisherigen einige Vorteile auf:

- Die Trennung von akustischen und strömungsmechanischen Größen ist eindeutig. Die Störungsrechnung erlaubt es, die Größen lediglich insoweit zu approximieren, daß die hier nicht interessierende Rückwirkung der akustischen Welle auf das Geschwindigkeitsfeld nicht erfaßt wird.

- Die Gleichungen beschreiben die akustische Wellenausbreitung im inkompressiblen und drehbehafteten Strömungsgeschwindigkeitsfeld nichtkonstanter Temperatur und erfassen dadurch die wesentlichen Eigenschaften des atmosphärischen Geschwindigkeitsfeldes besser.

- Die strömungsmechanischen Gleichungen sind einfacher, weil sie statt der Lösung eines nichtlinearen partiellen Differentialgleichungssystemes lediglich die sukzessive Lösung von linearen partiellen Differentialgleichungen erfordern.

- Die akustischen Gleichungen in der hier vorgenommenen dimensionslosen Schreibweise zeigen, daß wegen der nichtlinearen Wechselwirkung der akustischen Welle mit dem Geschwindigkeitsfeld eine zusätzliche Skala entsteht, die bei Messungen an akustischen Modellen berücksichtigt werden muß: Es kann nicht davon ausgegangen werden, daß die Meßergebnisse invariant gegenüber starken Schalldruckpegelerhöhungen sind, die aus meßtechnischen Gründen häufig vorgenommen werden.

Mit Hilfe einer verallgemeinerten und inzwischen allgemein akzeptierten akustischen Energiebeziehung für die linearisierten akustischen Gleichungen wird gezeigt, daß die akustische Welle Energie aus dem Geschwindigkeitsfeld beziehen oder Energie an das Feld abgeben kann. Es wird gezeigt, wie dieser Energieaustausch in den geometrisch-akustischen Gleichungen berücksichtigt werden kann. Mit Hilfe der WKBJ-Approximation werden die Eikonalgleichung und eine

Transportgleichung hergeleitet. Für die Eikonalgleichung ergibt sich keine Änderung. Die einfachere Form der akustischen Gleichungen erlaubt es, mit Hilfe der verallgemeinerten Energiebeziehung für die linearisierten akustischen Gleichungen eine Transportgleichung für den Schalldruck zu erhalten, in der der Energieaustausch mit dem Strömungsfeld berücksichtigt wird. Dabei zeigt sich, daß es günstiger ist, statt des Schalldrucks eine verallgemeinerte Größe, die "wave-action" zu berechnen, aus der auf einfache Weise der Schalldruck gewonnen werden kann. Die hier vorgenommene Herleitung zeigt, daß der von verschiedenen Autoren vorgeschlagene Satz von der Erhaltung der "wave-action" entlang den Charakteristiken der Eikonalgleichung nur gültig ist, wenn der Wellenvektor in Richtung des Strömungsgeschwindigkeitsfeldes verläuft. In allen anderen Fällen sind die Charakteristiken der Transportgleichung für die "wave-action" und die der Eikonalgleichung nicht identisch. Daher ist es notwendig, bei den "ray-tracing"-Methoden die charakteristischen Gleichungen der Transportgleichung zu lösen, anstatt - wie bisher häufig geschehen - den Erhaltungssatz der "wave-action" auf die Eikonalgleichung anzuwenden.

Im letzten Teil der Arbeit wird am praktischen Beispiel der Schallausbreitung um einen Lärmschutzwall untersucht, welche numerischen Methoden zur Verfügung stehen, um die hier entwickelten Gleichungen mit geringem numerischen Aufwand zu lösen. Es werden numerische Methoden vorgestellt, die eine Lösung der strömungsmechanischen Gleichungen und der charakteristischen Gleichungssysteme der geometrischen Akustik mit Hilfe eines einfachen Laborrechners gestatten. Dabei stellt sich heraus, daß der Einfluß des Walles auf das Strömungsfeld bei der Berechnung der Charakteristiken berücksichtigt werden muß. Das nicht-geschichtete Strömungsfeld in der Umgebung des Walles hat zwar nur bis zu einem Abstand von ca einem halben Meter einen Einfluß auf den Verlauf der Charakteristiken der Eikonalgleichung. Durch die hier auftretenden starken Strömungsgeschwindigkeitsänderungen werden diese jedoch in ihrem Verlauf über 3o m genau so stark beeinflußt wie durch das geschichtete Feld.

Anhang 1 : Prädiktor-Korrektor-Verfahren

In der vorliegenden Arbeit wird mehrfach die Lösung partieller Differentialgleichungen auf die Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungssystemen der Form

$$\frac{d\vec{y}}{dx_i} = \vec{F}(\vec{x},\vec{y}) \; ; \qquad \vec{x} = (x_0, x_1, \ldots x_n)$$

zurückgeführt.

Bei der numerischen Lösung hat sich ein Prädikator-Korrektor-Verfahren nach RALSTON & WILF (1972)bewährt, das je Integrationsschritt mit der Schrittweite h nur eine zweimalige Berechnung von $\vec{F}$ erfordert und sich gegenüber anderen, z.B. RUNGE-KUTTA-Verfahren, durch größere Stabilität auszeichnet. Sind an den Punkten x_{j-k}; $k = 0, 1, 2, 3$ die Werte von $\vec{y}_{j-k}$ und $\frac{d\vec{y}}{dx_i}\Big|_{j-k} = \vec{F}_{j-k}$ bekannt, so wird der unbekannte Vektor $\vec{y}_{j+1}$ zunächst mit Hilfe des Prädiktors zu $\vec{P}_{j+1}$ nach der Formel

$$\vec{P}_{j+1} = \vec{y}_{j-3} + \frac{4h}{3}\,(2\,\vec{F}_j - \vec{F}_{j-1} + 2\,\vec{F}_{j-2})$$

geschätzt. Dieser Wert wird mit Hilfe des Modifikators:

$$\vec{M}_{j+1} = \vec{P}_{j+1} - \frac{112}{121}\,(\vec{P}_j - \vec{C}_j)$$

$$\vec{M}'_{j+1} = \vec{F}(\vec{x}_{j+1}, \vec{M}_{j+1})$$

aus $\vec{P}_{j+1}$ und den im vorherigen Schritt berechneten Werten $\vec{P}_j$ und $\vec{C}_j$ verbessert. Den endgültigen Wert von y im nächsten Integrationsschritt erhält man dann aus der Korrektor-Formel:

$$\vec{C}_{j+1} = \frac{1}{8}\;\; 9\vec{y}_j - \vec{y}_{j-2} + 3h(\vec{M}'_{j+1} + 2\,F_j - F_{j-1})$$

und

$$\vec{y}_{j+1} = \vec{C}_{j+1} + \frac{9}{121}\,(\vec{P}_{j+1} - \vec{C}_{j+1}) \quad , \qquad j = 4,N.$$

Die Anfangsschritte $j = 1,2,3$ werden mit Hilfe des RUNGE-KUTTA-

Verfahrens 4. Ordnung /SAUER & SZABO (1969)/ aus:

$$\vec{K}_1 = \vec{F}(\vec{x}_j, \vec{y}_j)$$
$$\vec{K}_2 = \vec{F}(\vec{x}_j, \vec{y}_j + \frac{h}{2}\vec{K}_1)$$
$$\vec{K}_3 = \vec{F}(\vec{x}_j, \vec{y}_j + \frac{h}{2}\vec{K}_2)$$
$$\vec{K}_4 = \vec{F}(\vec{x}_j, \vec{y}_j + h\,\vec{K}_3)$$

zu

$$\vec{y}_{j+1} = \vec{y}_j + \frac{h}{6}(\vec{K}_1 + 2\vec{K}_2 + 2\vec{K}_3 + 2\vec{K}_4)$$

berechnet.

Anhang 2 : Größen und Zahlenwerte

(Soweit in der Arbeit nicht anders angegeben wurden die in Klammern stehenden Zahlenwerte verwendet.)

a_k : Abstand des Aufpunktes zum Randpunkt i des k-ten Linienelementes

b_k : Abstand des Aufpunktes zum Randpunkt i + 1 des k-ten Linienelementes

c : Schallgeschwindigkeit

c_r : Bezugsschallgeschwindigkeit (331.58 m/s)

c_p : spezifische Wärme bei konstantem Druck (1oo1.o65 $m^2/K/s^2$)

c_v : spezifische Wärme bei konstantem Volumen

E : innere Energie des Gases

E : akustische Energiedichte

g : Erdbeschleunigung (9.8o7 m/s^2)

h_k : Länge des k-ten Linienelementes

H : Wärmefluß

$\vec{I}$: akustischer Energiefluß, Intensität

j : imaginäre Einheit

$\tilde{k}$: Betrag des Wellenvektors im ruhenden Medium, bezogen auf L_r

K_{jk} : Koeffizienten der Quelldichtematrix

L : akustischer Schalldruckpegel
($L = 2o \log \frac{p'}{P_0'}$, $P_0' = 2 \times 1o^{-5}Pa$)

L' : Skalierungslänge für die nichtneutrale Atmosphäre

L_r : strömungsmechanische Bezugslänge

Ma : Machzahl

N_k : Normalkomponente der vom k-ten Linienelement hervorgerufenen Strömungsgeschwindigkeit

$\vec{N}$: gesamter Energiefluß

p : Druck, allgemein

p' : Schalldruck

p_e : Luftdruck am Erdboden ($1.013 \cdot 10^5$ Pa)

p_t, p_x, p_y, p_z : Ableitungen der reduzierten Phasenfunktion σ nach $\tilde{t}$, x^*, y^*, z^*

$\underline{p}_n$: komplexe Schalldruckamplitude n-ter Ordnung der W K B J - Approximation

p_r : Bezugsdruck, Ruhedruck des Gases

$\vec{r}$: Ortsvektor, allgemein

Re : Reynoldszahl

Ri : Richardson - Zahl

s : Bogenlänge

$\vec{s}$: Ortsvektor, allgemein

S : Entropie

$S(x^*, y^*, z^*, \tilde{t})$: Phasenfunktion

t : Zeit

T_k : Tangentialkomponente der vom k-ten Linienelement hervorgerufenen Strömungsgeschwindigkeit

T : absolute Temperatur

T' : akustische Temperatur

T_r : Bezugstemperatur des Gases

T_* : Schubspannungstemperatur

u : x-Komponente der Strömungsgeschwindigkeit

u' : x-Komponente der Schnelle

u_* : Schubspannungsgeschwindigkeit

v : y-Komponente der Strömungsgeschwindigkeit

v' : y-Komponente der Schnelle

$\vec{v} = (u, v, w)$: Strömungsgeschwindigkeit

$\vec{v}' = (u', v', w')$: Schnelle

$\underline{\vec{v}}_n$: komplexe Schnelle n-ter Ordnung der W K B J - Approximation

w : z-Komponente der Strömungsgeschwindigkeit

w' : z-Komponente der Schnelle

W : wave-action

x, y, z : kartesische Ortskoordinaten

z_0 : Rauhigkeitslänge

α_k : Winkel des k-ten Linienelementes, relativ zur x-Achse

α_{jk} : Winkel zwischen den Linienelementen j und k

γ : $c_p / c_v = 1.4o3$

γ_k : Quelldichte des k-ten Linienelementes

δ : Rückwirkung der akustischen Größen auf die strömungsmechanischen Größen

ε : akustische Störgröße

λ : Wellenlänge

μ : Scherviskosität, dynamische Zähigkeit ($1.7o8 \cdot 1o^{-5}$ kg/ m /s)

ν : kinematische Zähigkeit ($1.33 \cdot 1o^{-5}$ m^2/s)

ξ : Volumenviskosität

π : 3.14159

ρ : Dichte

ρ_e : Dichte am Erdboden (1.293 kg/m^3 bei T = 273,2 K und $p_e = 1.o13 \cdot 1o^5$ Pa)

ρ' : akustische Wechseldichte

ρ_r : Bezugsdichte

$\sigma(x^*, y^*, z^*)$: reduzierte Phasenfunktion

τ : Laufzeit

Φ : Potential des Strömungsfeldes

Ψ_k : Winkel zwischen den Randpunkten des k-ten Linienelementes vom Aufpunkt aus gesehen

ω : Kreisfrequenz

ω_b : Kreisfrequenz für den bewegten Beobachter

Indizes :

e	:	Größen am Erdboden
g	:	Anteil des geschichteten Feldes
i,j,k	:	Zählindizes
n	:	Normalkomponente
r	:	Bezugsgröße
R	:	ruhendes Medium
s	:	Störanteil
o,1	:	approximierende Größen
*	:	Größen bei der Rauhigkeitslänge
'	:	zeitabhängige, insbesondere akustische Wechselgröße
-	:	zeitlich gemittelte Größe, zeitliche Mittelung
$\underline{\ }$	:	komplexe Größe
$\underline{\underline{\ }}$	:	konjugiert - komplexe Größe
*	:	Größe in strömungsmechanischer Skala
^	:	strömungsmechanische Größe
~	:	Größe in akustischer Skala
$\rightarrow$	:	Vektorgröße
$\lvert\ \rvert$	:	Betrag der Größe

Literaturverzeichnis

BABIČ, V.M.; KIRPIČNIKOVA, N.Y. (1979): The boundary-layer method in diffraction problems, Springer-Verlag, Berlin

BLAUERT, J. (1978): Akustik I, Vorlesung der Abteilung Elektrotechnik der Ruhr-Universität Bochum

BLOKHINTZEV, D. (1946a): The propagation of sound in an inhomogenous and moving medium, JASA, Vol. 18, pp 322-334

BLOKHINTZEV, D.I. (1946b): Acoustics of a nonhomogenous moving medium, NACA TM 1399

BRETHERTON, F.P.; GARRETT, C.J.R. (1969): Wavetrains in inhomogenous moving media, Proc. Roy. Soc. A 302, pp 529-554

BROWN, E.H.; HALL, F.F. (1978): Advances in Atmospheric Acoustics, Reviews of Geophysics and Space Physics, Vol. 16, pp 47-110

BUCHAL, R.N.; KELLER, J.B. (1960): Boundary layer problems in diffraction theory, Comm. Pure Appl. Math., Vol. 13, pp 85-114

CASANOVA-MARTINEZ, S.; THOMASSEN, H.G.(1975): Berücksichtigung von meteorologischen Einflüssen auf die Schallausbreitung bei der Beurteilung von Schallpegelmessungen, TÜ 16, S. 45-48

CASANOVA-MARTINEZ, S. (1976): Untersuchung zur Bestimmung der Verteilung von Schallpegeln bedingt durch meteorologische Einflüsse in der unteren Atmosphäre, Untersuchung für den Minister für Arbeit, Gesundheit und Soziales des Landes Nordrhein-Westfalen

CHERNOV, L.A. (1960): Wave Propagation in a Random Medium, McGraw Hill, New York

CHESSEL, C.I. (1973): Three dimensional acoustic-ray tracing in an inhomogenous anisotropic atmosphere using Hamilton's equations, JASA, Vol. 53(1), pp 83-87

CHESSEL, C.I. (1977): Propagation of noise along a finite impedance boundary, JASA, Vol. 62, pp 825-834

CHESSEL, C.I. (198o): Predicting noise near the earth's surface, 2o. ICA, Sydney

COURANT, R., HILBERT, D. (1968): Methoden der Mathematischen Physik, Springer-Verlag, Berlin

DAIGLE, G.A.; PIERCY, J.E.; EMBLETON, T.F.W. (1978): Effects of atmospheric turbulence on the interference of sound waves near a hard boundary, JASA, Vol. 64(2), pp 622-63o

DAVENPORT, A.G. (1965): The Relationship of Wind Structure to Wind Loading, Paper 2, Symp. 16, Proc. of Conf. on "Wind effects on Buildings and Structures" at NPL, HMSO, London

DE JONG, R. (1974): A Model Study of the Effect of Wind on the Sound Attenuation of Barriers, Acoustics and Vibration Labatory, MIT, Cambridge, Mass. 02139

DE JONG, R.; STUSNICK, E. (1976): Scale Model Studies of the Effects of Wind on Acoustic Barrier Performance, Noise Control Engineereing, Vol. 6, pp 1o1-1o9

EMBLETON, T.F.W.; Piercy, J.E.; OLSON, N. (1978): Outdoor sound propagation over ground of finite impedance, JASA, Vo. 59, pp 267-276

EMBLETON, T.F.W. (198oa): Sound Propagation Outdoors - Improved Prediction Schemes for the 8o's, inter-noise 8o, Miami, Florida, pp 16-3o

EMBLETON, T.F.W. (1980b): Line-integral theory of barrier attenuation in the presence of ground, JASA, Vol. 67(1), pp 42-45

EVERSMAN, W. (1979): Acoustic energy in ducts: further observations, J. Sound Vibr., Vol. 62(4), pp 517-532

GOLDSTEIN, M.E. (1976): Aeroacoustics, McGraw-Hill International Book Company, New York

HARRIS, C.H. (1957): Handbook of Noise-Control, McGraw-Hill, New York

HAYES, W.D. (1968): Energy Invariant for Geometric Acoustics in a Moving Medium, The Physics of Fluids, Vol. 11(4), pp 1654-1656

HELLER, G.S. (1953): Propagation of acoustic discontinuities in an inhomogenous moving medium, JASA, Vol. 25(5), pp 950-951

INGARD, V.; Maling, G.C. (1963): On the Effect of Atmospheric Turbulence on Sound Propagated over Ground, JASA, Vol. 35, pp 1056-1058

IVEY, E.S.; RUSSEL, G.A. (1977): Acoustical scale model study of attenuation of sound by wide barriers, JASA, Vol. 62, pp 601-606

ISEI, T.; EMBLETON, T.F.W.; PIERCY, J.E. (1980): Noise reduction by barriers on finite impedance ground, JASA, Vol. 67(1), pp 46-58

JASWON, M.A.; SYMM, G.T. (1977): Integral Equation Methods in Potential Theory and Elastostatics, Academic Press, London

JONASSEN, H.G. (1972): Sound Reduction by barriers on the Ground, J. Sound Vibr., Vol 22(1), S.113-126

KEYPS: zitiert nach LUMLEY&PANOFSKY (1964), S.113

KLINE, M.; KAY, I. (1965): Electromagnetic Theory and Geometrical Optics, Interscience Publishers, New York

KORNHAUSER, E.T.(1953): Ray Theory for Moving Fluids, JASA, Vol. 25, pp 945-949

KOUYOUMIJAN, R.G. (1975): The geometrical theory of diffraction and its application, in: Topics in applied physics, Vol.3, Springer-Verlag, Berlin

KRIEBEL, A.R. (1972): Refraction and Attenuation of Sound by Wind and Thermal Profiles over a Ground Plane, JASA, Vol. 51, pp 19-23

KURZE, U. (1973): Noise reduction by barriers, JASA, Vol. 55, pp 504-517

KURZE, U. (1977): Schallschutz durch Abschirmung, Forschungsbericht der Bundesanstalt für Arbeitsschutz und Unfallforschung Nr. 164

LANDAU, L.D.; LIFSHITZ, E.M. (1978): Hydrodynamik, Akademie-Verlag, Berlin

LAGERSTROM, P.A. (1956): Laminar Flow Theory , in: Theory of Laminar Flows, Hg. F.K. Moore, Princeton University Press

LIGHTHILL, J. (1978): Waves in Fluids, Cambridge University Press, Cambridge

LUMLEY, J.L.; PANOFSKY, H. A. (1964): The structure of atmospheric turbulence, John Wiley & Sons, New York

LUNEBERG, R.K. (1944): Mathematical theory of optics, Brown-University Notes, Providence

MAEKAWA, Z. (1968): Noise Reduction by Screens, Applied Acoustics, Vo. 1, pp 157-173

MARSAL, D. (1976): Die numerische Lösung partieller Differentialgleichungen, Bibliographisches Institut Mannheim

MC VEHIL, G.E. (1962): Wind distribution in the adiabatic boundary layer, Ph. D. thesis, Dep. of Meteor., Pennsylvania State University

MEYER, R.; SCHROETER, G. (1981): The Application of Differential Geometry to Ray Acoustics in Inhomogenous and Moving Media, Acustica, Bd. 47, S. 1o5

MÖHRING, W. (1971): Energy flux in duct flow, J. Sound Vibr., Vol. 18(1), pp 1o1-1o9

MONIN, A.S.; OBUKOW, A.M. (1954): Basic regularity in turbulent mixing in the surface layer of the atmosphere, Trudy Geophy. Inst. ANSSSR, No. 24, p 163

MORFEY, C.L. (1971): Acoustic energy in nonuniform flows, J. Sound Vibr., Vol. 14(2), pp 159-17o

MORFEY, C. L. (1979): Absorption of Sound Waves in the Atmosphere, Vortrag beim Seminar "Acoustic Wave Propagation", v. Karman Institute for Fluid Dynamics, Rhode-Saint Genese, Belgien

MORSE, P.M.; INGARD, K.U. (1961): Linear Acoustic Theory, in: Handbuch der Physik, Bd. 11/1, Springer-Verlag, Berlin,

MORSE, P.M.; INGARD, K.U. (1968): Theoretical Acoustics, McGraw-Hill Book Company, New York

NAYFEH, A.H. (1973): Pertubation Methods, John Wiley & Sons, New York

NAYFEH, A.H.; MOOK, D.T. (1979): Nonlinear Oscillations, John Wiley & Sons, New York

NIJS, L. (198o): Combined Effects of Ground Absorption and Diffraction by Obstacles, inter-noise 80 Miami, Florida

PIERCE, A.D. (1974): Diffraction of Sound around Corners and over Wide Barriers, JASA, Vol. 55, S. 941-955

PIERCY, J. E.; EMBLETON, T.F.W.; SUTHERLAND, L.C. (1977): Review of noise propagation in the atmosphere, JASA, Vol. 61, pp 14o3-1418

PIORR, D. (198o): Untersuchung der Keller'schen Beugungstheorie für die Berechnung der Schalldämmung von Lärmschutzwällen, Diplomarbeit am Lehrstuhl für Allgemeine Elektrotechnik und Akustik, Ruhr-Universität Bochum

PRANDTL, L.; OSWATITSCH, K.; WIEGHARDT, K. (1969): Führer durch die Strömungslehre, Vieweg & Sohn, Braunschweig

RALSTON,A.; WILF, H.S. (1972): Mathematische Methoden für Digitalrechner, Bd.1, R. Oldenburg Verlag, München

RAYLEIGH (1879): Strutt, J.W., Baron Rayleigh, Die Theorie des Schalles, Verlag Vieweg & Sohn, Braunschweig

REDFEARN, S.W. (194o): Some Acoustical Observer Problems, Phil. Mag., Vol. 3, pp 223-236

REINHOLD, G.(1971): Bau- und Verkehrstechnische Maßnahmen zum Schutz gegen Straßenverkehrslärm, Forschungsberichte des Bundesverkehrsministeriums, Heft 119

REINHOLD, G. (1974): Die Wirkung von Abschirmeinrichtungen zur Lärmminderung an Straßen, Forschungsberichte des Bundesverkehrsministeriums, Heft 157

SAUER, R.; SZABO, I. (1969): Mathematische Hilfsmittel des Ingenieurs, Teil 2, Springer Verlag, Berlin

SCHOCH, A. (1953): Remarks on the concept of acoustic energy, Acustica, Bd. 3, S. 181-184

SCHOLES, W.E.; SALVIDGE, A.C.; SARGENT, J.W. (1971): Field performance of a noise barrier, J. Sound Vibr. 16(4), pp 627-642

SCHROTT, A. (1977): Berechnung der Strahlungscharakteristiken von Antennen auf komplizierten Körpern im Hochfrequenzprinzip der geometrischen Beugungstheorie, DFVLR, Oberpfaffenhofen

SECKLER, B.D.; KELLER, J.B. (1959): Geometrical theory of diffraction in inhomogenous media, JASA, Vol. 31, pp 192-216

SYKES, R.I. (1978): Stratification effects in boundary layer flow over hills, Proc. R. Soc. London, Vol. A 361, pp 225-243

TATARSKII, V.I. (1971): The Effects of the Turbulent Atmosphere on Wave Propagation, Keter Press, Jerusalem

TEUNISSEN, H.W. (197o): Characteristics of the mean wind and turbulence in the planetary boundary layer, UTIAS-Review, No. 32

THOMPSON, R.J. (1972): Ray theory for an inhomogenous moving medium, JASA, Vol. 51, pp 1675-1682

THOMPSON, R.J. (1974a): Ray-acoustic intensity in a moving medium I, JASA, Vol. 55, pp 729-732

THOMPSON, R.J. (1974b): Ray-acoustic intensity in a moving medium II, JASA, Vol. 55, pp 733-737

UNGINČIUS, P. (1965): Acoustic-ray equations for a moving, inhomogenous medium, JASA, Vol. 37(3), pp 476-479

UNGINČIUS, P. (1972): Ray-acoustics and Fermat's Principle in a moving inhomogenous medium, JASA, Vol 51(5), pp 1759-1763

VASANTA RAM, V. (1975): Grenzschichttheorie höherer Ordnung für die Strömung an einer transversal gekrümmten Zylinderfläche beliebiger Gestalt, Habilitationsschrift an der Abteilung Maschinenbau der Ruhr-Universität Bochum

WARFIELD, J.T.; JACOBSON, M.J. (1971): Invariance of geometric spreading loss with changes in ray parametrization, JASA, Vol. 50(1), pp 342-347

WHITE, R.W. (1971): Acoustic ray tracing in moving inhomogenous fluids, JASA, Vol. 53(6), pp 17oo-17o4

WHITHAM, G.B. (1974): Linear and Nonlinear Waves, John Wiley & Sons, New York

Lebenslauf

1. 7. 1949	geboren als Sohn von Hugo und Hildegard Vogelsang gen. Buschmann in Hagen/Westf.
1956 - 1960	Besuch der Pestalozzi-Volksschule in Gevelsberg
1960 - 1968	Besuch des mathematisch-naturwissenschaftlichen Städtischen Gymnasiums Gevelsberg
20. 5. 1968	Abitur
1968	Praktikum beim Fernmeldeamt Hagen der Deutschen Bundespost und bei der Firma Paul Ferd. Peddinghaus in Gevelsberg
1968 - 1974	Studium der Elektrotechnik an der Ruhr-Universität Bochum
31. 5. 1974	Diplom
1974 - 1975	wissenschaftliche Hilfskraft am Lehrstuhl für Allgemeine und Theoretische Elektrotechnik
1975 - 1981	wissenschaftlicher Assistent am Lehrstuhl für Allgemeine Elektrotechnik und Akustik